PLANCHES D'ORAUX

« Récolte » de 2024

Dernière mise à jour : Jeudi 11 juillet, 10h00.

A. Concours CCINP

Planche A1 — CCINP 2024

1. Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

1.1. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

1.2. Donner, si elle existe, la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0.

1.3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$.

1.4. Calculer sa somme lorsque c'est possible.

1.5. En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

2. On se donne $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}^3 - 4\mathrm{M} = 0$ et $\operatorname{Tr}\mathrm{M} = 0$.

2.1. Prouver que le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}$.

2.2. En déduire toutes les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions de l'énoncé.

Solution

1. **1.1.** On réalise une décomposition en éléments simples. On trouve après calculs $a = 1/3$, $b = -1/3$ et $c = 2/3$.

1.2. Notons F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0, cette dernière existant bien puisque f est continue sur cet intervalle. En utilisant la décomposition précédente, on écrit, pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-4}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \end{aligned}$$

On trouve alors en primitivant pour $x \in]-1,1[$ et en ajustant la constante pour satisfaire $\mathrm{F}(0) = 0$:

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

1.3. L'application du critère de d'Alembert donne rapidement que le rayon recherché est égal à 1.

1.4. Notons S la somme de cette série entière sur $]-1,1[$. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$, il vient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3} = f(x)$$

où l'on a utilisé l'expression de la somme d'une série géométrique de raison $-x^3 \in]-1,1[$. Puisque $\mathrm{S}(0) = 0$, on obtient donc $\mathrm{S} = \mathrm{F}$ où F est la fonction trouvée à la question **1.2**.

1.5. Pour $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ est alternée et vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées (son terme général en valeur absolue est décroissant et tend vers 0). On obtient donc la convergence de la série ainsi que la majoration du reste :

$$\forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+4}}{3n+4} \right| \leqslant \frac{1}{3n+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La majoration étant indépendante de $x \in [0,1]$, on obtient la convergence uniforme de S sur $[0,1]$. Les fonctions sommées étant continues sur $[0,1]$ puisque polynomiales, on obtient que S est continue sur $[0,1]$. Ainsi, par continuité de S en 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

2. 2.1. C'est une propriété de cours (qu'il faut redémontrer ici) : étant donné que P est annulateur de M, le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de P, à savoir $\{-2,0,2\}$.

2.2. Le polynôme P étant scindé à racines simples, toujours grâce au cours, M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons m_{-2}, m_0 et m_2 les multiplicités des potentielles valeurs propres trouvées ci-dessus (on convient que la multiplicité est nulle si jamais la valeur n'est pas valeur propre). Puisque M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, son polynôme caractéristique est scindé et sa trace vaut donc la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités. On obtient $-2m_{-2} + 0m_0 + 2m_2 = 0$, c'est-à-dire $m_{-2} = m_2$. La matrice M étant diagonalisable et de taille 4, elle est donc semblable à l'une des trois matrices $\mathrm{diag}(0,0,0,0) = 0$, $C_1 = \mathrm{diag}(-2,-2,2,2)$ ou $C_2 = \mathrm{diag}(0,0,-2,2)$. Réciproquement, on peut vérifier que la matrice nulle et toute matrice semblable à C_1 ou C_2 est bien solution du problème.

Planche A2 — CCINP 2024

1. On fixe $\alpha > 0$ et on pose :

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)$$

1.1. Donner le domaine de définition de f_α.

1.2. Calculer f_α sur $[0,\pi/2]$.

1.3. Étudier l'intégrabilité de f_α sur $[0,\pi/2]$.

1.4. On pose pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$.

1.5. Calculer $u_n(3)$.

2. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et telle que $A^3 + 9A = 0$.

2.1. Montrer que $\mathrm{sp}(A) \subset \{0, -3i, 3i\}$.

2.2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2.3. Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution

1. 1.1. Si $t \in \pi\mathbb{Z}$, le terme général de la série définissant $f_\alpha(t)$ est nul de sorte que $f_\alpha(t) = 0$. Si $t \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(t) \in \,]-1,1[$ et $f_\alpha(t)$ est, à un facteur $\sin^\alpha(t)$ près, une série géométrique convergente. Ainsi f_α est définie sur $\mathbb{R}$.

1.2. Grâce à la question précédente, on a $f_\alpha(0) = 0$ et :

$$\forall t \in \,]0,\pi/2], \quad f_\alpha(t) = \frac{\sin^\alpha(t)}{1-\cos t}$$

1.3. Avec l'expression de la question précédente, on constate que f_α est continue sur $]0,\pi/2]$. De plus, on a au voisinage de 0 :

$$f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^\alpha}{\frac{t^2}{2}} = 2t^{\alpha-2}$$

de sorte que par comparaison avec les intégrales de référence de Riemann, f_α est intégrable en 0 si et seulement si $2-\alpha<1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha>1$. En résumé, f_α est intégrable sur $[0,\pi/2]$ si et seulement si $\alpha>1$.

1.4. Pour $n\geqslant 0$ et $t\in[0,\pi/2]$, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \sin^\alpha(t)\cos^k(t)$$

On a alors :

$$\forall n\geqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2} S_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On applique alors le théorème de convergence dominée. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,\pi/2]$ qui converge simplement vers f_α sur $[0,\pi/2]$ et cette dernière fonction est continue par morceaux sur $[0,\pi/2]$. De plus,

$$\forall n\geqslant 0,\quad \forall t\in[0,\pi/2],\quad S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sin^\alpha(t)\cos^k(t)}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sin^\alpha(t)\cos^k(t) = f_\alpha(t)$$

et f_α est intégrable sur $[0,\pi/2]$ si $\alpha>1$ d'après la question précédente. On obtient donc que si $\alpha>1$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) \quad \text{existe,}$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge.

Soit maintenant $\alpha\leqslant 1$. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge. Les fonctions $v_n : t\in[0,\pi/2]\mapsto \sin^\alpha(t)\cos^n(t)$ sont continues sur $[0,\pi/2]$ et intégrables. La série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge simplement sur $[0,\pi/2]$ vers f_α qui est continue sur $]0,\pi/2]$. De plus, $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{\pi/2}|v_n| = \sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge par hypothèse. Le théorème d'intégration terme à terme donnerait alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = f_\alpha$ est intégrable sur $[0,\pi/2]$, ce qui n'est pas le cas puisque $\alpha\leqslant 1$. Ainsi, si $\alpha\leqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ diverge.

1.5. Le changement de variable $u=\cos t$ donne immédiatement, pour $n\geqslant 0$:

$$u_n(3) = \int_0^1 (1-u^2)u^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(3)$ est bien convergente, ce qui est cohérent avec le résultat de la question précédente.

2. **2.1.** C'est une propriété de cours (qu'il faut redémontrer ici) : étant donné que $P(X)=X^3+9X$ est annulateur de A, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P, à savoir $\{0,-3i,3i\}$.

2.2. Sur $\mathbb{C}$, le polynôme P étant scindé à racines simples, toujours grâce au cours, A est diagonalisable.

2.3. La première question montre qu'il n'y a qu'une seule valeur propre réelle possible pour A. Ainsi, si A était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, n'ayant que 0 pour valeur propre, elle serait égale à $0\cdot I_n$, ce qui donnerait $A=0$. Ce n'est pas le cas par hypothèse. Ainsi A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Planche A3 — CCINP 2024

1. On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. On définit alors, pour tout $f\in E$:

$$N_0(f) = \int_0^1 |f|,\qquad N_1(f) = \left|\int_0^1 f\right| + \int_0^1 |f'| \qquad\text{et}\qquad N_2(f) = \left|\int_0^1 f\right| + \left|\int_0^1 f'\right| \int_0^1 |f''|$$

1.1. Calculer $N_0(f)$, $N_1(f)$ et $N_2(f)$ lorsque $f : x\mapsto \sin(2\pi x)$.

1.2. Vérifier que N_0, N_1 et N_2 sont des normes sur E.

1.3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Prouver qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^1 f = f(c)$$

1.4. Montrer que $\mathrm{N}_0(f) \leqslant \mathrm{N}_1(f)$ pour tout $f \in \mathrm{E}$ et trouver une fonction de E pour laquelle il y a égalité.

1.5. Existe-t-il une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $\mathrm{N}_0(f) \geqslant \mathrm{C}\mathrm{N}_1(f)$ pour tout $f \in \mathrm{E}$?

2. Soient $(\mathrm{E}, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j, \quad (u_i \,|\, u_j) = a$$

2.1. Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Calculer, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \,|\, u_j - u_n)$$

2.2. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Solution

1. 1.1. On calcule $\mathrm{N}_0(f)$ grâce à une étude du signe de $x \mapsto \sin(2\pi x)$ sur $[0,1]$ pour gérer la valeur absolue et à la relation de Chasles :

$$\mathrm{N}_0(f) = \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x - \int_{1/2}^1 \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$$

De même, on trouve ensuite :

$$\mathrm{N}_1(f) = 4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_2(f) = 8\pi$$

1.2. On étudie ici N_1, les arguments pour N_0 et N_2 étant alors similaires. La positivité et l'homogénéité de N_1 sont claires ; et l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue permet de prouver l'inégalité triangulaire sur N_1. Pour la séparation, si l'on a $\mathrm{N}_1(f) = 0$ avec $f \in \mathrm{E}$, il vient par somme de termes positifs nulle :

$$\left|\int_0^1 f\right| = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |f'|$$

Grâce au caractère défini de l'intégrale, la deuxième relation donne que $f' = 0$ sur $[0,1]$ et ainsi que f est constante sur $[0,1]$. La première relation donne ensuite que cette constante est nulle et donc finalement $f = 0$ comme souhaité.

1.3. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, grâce au théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes. On note respectivement m et M dans $[0,1]$ des points où elle atteint son minimum et son maximum. On a donc : $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(\mathrm{M})$ pour tout $x \in [0,1]$. Par croissante de l'intégrale, il vient en intégrant sur $[0,1]$:

$$f(m) \leqslant \int_0^1 f \leqslant f(\mathrm{M})$$

Ainsi le nombre $\int_0^1 f$ est compris entre deux valeurs $f(m)$ et $f(\mathrm{M})$ de f. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, ce nombre est atteint par f et il existe donc bien $c \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 f = f(c)$.

1.4. Soit $f \in \mathrm{E}$. On reprend les notations de la question précédente. Pour $x \in [0,1]$, on a grâce au théorème fondamental de l'analyse :

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f + \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit par inégalité triangulaire, toujours pour $x \in [0,1]$:

$$\left|f(x)\right| \leqslant \left|\int_0^1 f\right| + \left|\int_c^x \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1 f\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t = \mathrm{N}_1(f)$$

Par croissance de l'intégrale, il vient $\mathrm{N}_0(f) \leqslant \mathrm{N}_1(f)$ en intégrant sur $[0,1]$.
Pour la fonction constante $f : x \mapsto 1$, on constate que $\mathrm{N}_0(f) = \mathrm{N}_1(f)$.

1.5. S'il existait une telle constante $C > 0$, on aurait, en appliquant en $f : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

$$\frac{C}{n+1} + C \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on trouverait $C \leqslant 0$, ce qui absurde. Ainsi, une telle constante n'existe pas.

2. 2.1. On a, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \,|\, u_j - u_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i \,|\, u_j) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i \,|\, u_n)\\ &= \sum_{i\neq j} \lambda_i \cdot a + \lambda_j - \sum_{i \neq n} \lambda_i \cdot a - \lambda_n\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $(u_k \,|\, u_\ell)$ vaut a si $k \neq \ell$ et 1 si $k = \ell$ puisque les vecteurs sont supposés unitaires. On écrit ensuite :

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \,|\, u_j - u_n) &= \sum_{i\neq j} \lambda_i \cdot a + \lambda_j - \sum_{i \neq n} \lambda_i \cdot a - \lambda_n\\ &= a \sum_{i \notin \{j,n\}} \lambda_i + a\lambda_n + \lambda_j - a \sum_{i \notin \{j,n\}} \lambda_i - a\lambda_j - \lambda_n\\ &= (\lambda_j - \lambda_n)(1-a)\end{aligned}$$

2.2. L'espace E est de dimension n et la famille étudiée possède n vecteurs ; ainsi, pour prouver que c'est une base, il est suffisant de prouver qu'elle est libre. On se donne donc des scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$. Avec la question précédente, cela donne :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad (\lambda_j - \lambda_n)(1-a) = 0$$

Or $a \neq 1$ par hypothèse donc $\lambda_j = \lambda_n$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On note λ la valeur commune des $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: il nous suffit maintenant de montrer que $\lambda = 0$ pour conclure. Par un calcul analogue à la question précédente, on a :

$$0 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \,|\, u_1) = (\sum_{i=1}^n \lambda u_i \,|\, u_1) = \lambda\left(\sum_{i\neq j} a + 1\right) = \lambda(1 + (n-1)a)$$

Comme $a \neq -\frac{1}{n-1}$, il vient $\lambda = 0$ comme souhaité.

Planche A4 — CCINP 2024

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+2e^t)^{n+1}}\,dt$$

1.1. Prouver que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_n = \frac{1}{2n3^n} + \frac{n-1}{2n} I_{n-1}$$

1.3. Déterminer, si elle existe, la limite de I_n.

1.4. Exprimer $n2^n I_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1.5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$.

1.6. Calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$.

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

2.1. Montrer que les valeurs propres de A sont incluses dans l'ensemble des racines du polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

2.2. Calculer det(A).

2.3. Démontrer que Tr(A) $\in \mathbb{N}$.

Solution

1. 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto e^{nt}/(1+2e^t)^{n+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{nt}}{2^{n+1}e^{t(n+1)}} = \frac{1}{2^{n+1}}e^{-t}$$

qui est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de référence exponentielle). Ainsi l'intégrale I_n converge.

1.2. On fixe $n \geqslant 1$ et on réalise une intégration par parties généralisée, sous réserve d'existence du crochet :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+2e^t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{(n-1)t}}_{=u}\underbrace{\frac{2e^t}{(1+2e^t)^{n+1}}}_{=v'}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n(1+2e^t)^n}e^{(n-1)t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{n(1+2e^t)^n}(n-1)e^{(n-1)t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le crochet est bien convergent en $+\infty$ et vaut 0 (ce que l'on peut voir en prenant par exemple un équivalent). On obtient donc finalement :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2n3^n} + \frac{n-1}{2n}\mathrm{I}_{n-1}$$

1.3. Pour obtenir la limite de I_n, on utilise le théorème de convergence dominée. Les fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et convergent simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$, fonction qui est elle aussi continue sur $[0, +\infty[$. La convergence simple vers 0 peut se voir en écrivant pour $t \geqslant 0$:

$$f_n(t) = \left(\frac{e^t}{1+2e^t}\right)^n \frac{1}{1+2e^t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Enfin, on a la domination :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \left|f_n(t)\right| = \left|\frac{e^{nt}}{(1+2e^t)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{e^{nt}}{2^{n+1}e^{(n+1)t}} \leqslant e^{-t}$$

avec la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. On conclut par théorème de convergence dominée que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

1.4. Grâce à la relation de la question **2**, on a pour $n \geqslant 1$:

$$n2^n\mathrm{I}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + (n-1)2^{n-1}\mathrm{I}_{n-1}$$

En notant $u_n = n2^n\mathrm{I}_n$ pour $n \geqslant 0$, on a donc pour $n \geqslant 1$:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

En sommant de 1 à $\mathrm{N} \geqslant 1$ cette relation, on obtient :

$$u_\mathrm{N} - u_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^\mathrm{N}}{1-\frac{2}{3}}\frac{2}{3} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^\mathrm{N}$$

On en déduit finalement, puisque $u_0 = 0$, que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad n2^n\mathrm{I}_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1.5. La question précédente permet d'obtenir que $n2^n\mathrm{I}_n$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$, ce qui donne I_n équivalent à $1/(n2^n)$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{I}_n x^n$ est le même que celui de $\sum_{n\geqslant 0} x^n/(n2^n)$. Ce dernier rayon se calcule facilement par application du critère de d'Alembert et on trouve donc finalement que le rayon R recherché est R = 2.

1.6. On fixe $x \in]-2, 2[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{I}_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{e^t x}{1+2e^t}\right)^n\frac{1}{1+2e^t}}_{=u_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

Nous allons appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour échanger série et intégrale. Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues et intégrables sur $[0,+\infty[$ (question **1.1**) et la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement (somme géométrique) vers la fonction :

$$\mathrm{S} : t \mapsto \frac{1}{1+2e^t}\frac{1}{1-\frac{e^t x}{1+2e^t}} = \frac{1}{1+e^t(2-x)}$$

qui est continue sur $[0,+\infty[$. Enfin, on a grâce à la croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{e^t|x|}{1+2e^t}\right)^n}_{\leqslant \frac{|x|^n}{2^n}} \underbrace{\frac{1}{1+2e^t}}_{\leqslant e^{-t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^n \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$$

Or $|x|<2$ donc on obtient que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|u_n|$ est convergente par comparaison à une série géométrique convergente. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n x^n = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^t x}{1+2e^t}\right)^n \frac{1}{1+2e^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+e^t(2-x)}$$

Après calcul de cette intégrale (changement de variable $u=e^t$ puis décomposition en éléments simples, par exemple), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n x^n = \ln\left(\frac{3-x}{2-x}\right)$$

2. 2.1. C'est une propriété de cours (qu'il faut redémontrer ici) puisque P est un polynôme annulateur de A. On observe que 1 est racine évidente de P puis par factorisation et résolution d'une équation du second degré que $-i$ et i sont les deux autres racines (complexes conjuguées) de P. Ainsi $\mathrm{sp}(\mathrm{A}) \subset \{1,-i,i\}$.

2.2. Si l'on se place dans $\mathbb{C}$, on sait que le déterminant de A est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicités. Avec des notations évidentes, on obtient $\det(\mathrm{A}) = 1^{m_1}(-i)^{m_{-i}}i^{m_i}$. Mais A étant réelle, on peut facilement montrer que $m_{-i}=m_i$ (voir le cours). Ainsi $\det(\mathrm{A}) = (-i^2)^{m_i} = 1^{m_i} = 1$.

2.3. De même, en se plaçant sur $\mathbb{C}$, on sait que la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités. On a donc, en utilisant $m_i = m_{-i}$: $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 1m_1 - im_i + im_i = 1m_1 = m_1 \in \mathbb{N}$.

Planche A5 — CCINP 2024

1. On considère une urne contenant $n\geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On procède à des tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. On note X_n la variable aléatoire réelle correspondant au rang du premier numéro tiré différent du numéro tiré au premier tirage. On définit également Y_n la variable aléatoire réelle correspondant au premier rang auquel tous les numéros sont apparus.

   1.1. Donner la loi de X_n.

   1.2. Vérifier que la loi de X_n est bien une loi de probabilité.

   1.3. Prouver que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ existe et la calculer.
   Donner, si elle existe, sa limite lorsque $n\to+\infty$ et interpréter le résultat.

   1.4. Donner la loi de Y_2.

   1.5. Pour $2\leqslant i<j$, donner $\mathrm{P}_{(\mathrm{X}_3=i)}(\mathrm{Y}_3=j)$.

   1.6. Déterminer la loi de Y_3.

2. Dans un espace euclidien E de dimension n muni d'une base orthonormée $\beta=(e_1,\ldots,e_n)$, on considère un projecteur orthogonal p de rang r.

   2.1. Soit $x\in\mathrm{E}$. Prouver que : $\|p(x)\|^2 = (p(x)\,|\,x)$.

   2.2. En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n}\|p(e_i)\|^2 = r$$

SOLUTION

1. **1.1.** Pour commencer, on a $X_n(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Soit donc $k \geqslant 2$. On va calculer $P(X_n = k)$. Pour ce faire, on introduit les variables $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que T_n renvoie le numéro de la boule tirée au tirage n pour $n \geqslant 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(T_1 = i, T_2 = i, \dots, T_{k-1} = i, T_k \neq i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} P(T_1 = i, T_2 = i, \dots, T_{k-1} = i, T_k \neq i) \qquad \text{(par } \sigma\text{−additivité)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} P(T_1 = i)P(T_2 = i)\cdots P(T_{k-1} = i)P(T_k \neq i) \qquad \text{(par indépendance des lancers)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

1.2. D'après le cours, il suffit de montrer que les $(P(X_n = k))_{k\geqslant 2}$ sont positifs et de somme égale à 1. La positivité est claire. De plus, par sommation des termes d'une suite géométrique de raison $1/n \in\,]0,1[$ $(n \geqslant 2)$, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X_n = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\ell} = n\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

Ainsi la loi de X_n est bien une loi de probabilité.

1.3. On rappelle le développement en série entière usuel suivant :

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On peut ainsi, sous réserve de convergence, calculer $E(X_n)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
E(X_n) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X_n = k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kn\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= n\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\\
&= n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}-1\right)\\
&= \frac{2n-1}{n-1}
\end{aligned}$$

On remarque que $E(X_n)$ tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui est cohérent puisque lorsque le nombre de boules est grand, on a dès le deuxième tirage une probabilité très proche de 1 ($(n-1)/n$) de tirer une boule différente de celle du premier tirage.

1.4. On a $Y_2(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et, pour $k \geqslant 2$, par σ−additivité puis indépendance des lancers :

$$\begin{aligned}
P(Y_2 = k) &= P\left((T_1 = 1, \dots, T_{k-1} = 1, T_k = 2) \cup (T_1 = 2, \dots, T_{k-1} = 2, T_k = 1)\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

1.5. Soit $2 \leqslant i < j$. Sachant $(X_3 = i)$, on sait qu'au i−ème tirage, on vient de piocher pour la première fois une boule différente de celle du premier tirage. Si l'on souhaite réaliser $(Y_3 = j)$, on veut qu'au j−ème tirage, on pioche pour la première fois l'unique boule qui n'a jamais été piochée jusqu'ici. On répète donc à partir du $(i+1)$−ème tirage une infinité de tirages indépendants jusqu'à obtenir ce succès dont la probabilité est de $1/3$; on reconnaît le schéma d'une loi géométrique, ce qui permet d'écrire :

$$P_{(X_3=i)}(Y_3 = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1}\frac{1}{3}$$

1.6. On a $Y_3(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Soit $j \geqslant 3$. Grâce à la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(Y_3 = j) &= \sum_{i=2}^{j-1} P_{(X_3=i)}(Y_3 = j)P(X_3 = i) \\
&= \sum_{i=2}^{j-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \frac{1}{3} \cdot 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{j} \sum_{i=2}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{j} \frac{1}{4} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}\right)
\end{aligned}$$

2. 2.1. Dans la suite, on note F le sous-espace sur lequel p projette. On fixe $x \in E$. Par le cours, on sait que $p(x) \in F$ et que $x - p(x)$ est orthogonal à tout élément de F. Ainsi, en particulier, $x - p(x)$ est orthogonal à $p(x)$, ce qui donne :

$$(x - p(x) \mid p(x)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x \mid p(x)) = (p(x) \mid p(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \mid p(x)) = \|p(x)\|^2$$

2.2. Grâce à la question précédente, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (p(e_i) \mid e_i)$$

Mais par le cours, les $\big((p(e_i) \mid e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les coefficients diagonaux de la matrice de p dans la base orthonormée β. Si l'on note S la somme recherchée, cela donne $S = \mathrm{Tr}(M_\beta(p)) = \mathrm{Tr}(p)$. De plus, dans une base β' adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de p est de la forme :

$$M_{\beta'}(p) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, il faut se rappeler que par définition, p agit comme l'identité sur les vecteurs de F et comme l'endomorphisme nul sur les vecteurs de $F^\perp$. Par lecture directe, on constate que $k = \mathrm{rg}(M_{\beta'}(p)) = \mathrm{rg}(p) = r$. On en déduit $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(M_{\beta'}(p)) = k = r$, ce qui donne finalement $S = r$ comme souhaité.

PLANCHE A6 — CCINP 2024

1. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1.1. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

1.2. En déduire que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

1.3. Prouver que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.
En déduire que $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

1.4. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : On pourra montrer que si $a \neq 0$ est dans $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ alors $u(a)$ aussi et qu'alors $(a, u(a))$ est libre.

2. On pose, sous réserve d'existence :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

2.1. Justifier que J est bien définie.

2.2. Prouver que :

$$\mathrm{J} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Solution

1. 1.1. Soit $y \in \mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id})$. On peut écrire $y = u^2(x) + x$ avec $x \in \mathbb{R}^3$. On a alors $u(y) = u^3(x) + u(x) = 0$ puisque $u^3 = -u$. Ceci prouve bien que $y \in \mathrm{Ker}(u)$ comme souhaité.

1.2. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$. Comme $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(x) = 0$ et donc aussi $u^2(x) = 0$. Mais comme $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$, on a $u^2(x) + x = 0$, ce qui donne $x = 0$ avec la relation précédente. Ainsi on obtient $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}) = \{0\}$. Pour prouver que ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il est donc maintenant suffisant de prouver que la somme de leurs dimensions vaut celle de $\mathbb{R}^3$, à savoir 3. La question précédente donne $\mathrm{rg}(u^2 + \mathrm{id}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Le théorème du rang donne quant à lui la relation $\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})) + \mathrm{rg}(u^2 + \mathrm{id}) = 3$. En combinant les deux, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})) \geqslant 3$, d'où l'on déduit $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})) = 3$ comme souhaité puisque la somme de ces deux sous-espaces reste un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et a donc une dimension inférieure ou égale à 3.

1.3. D'après l'hypothèse, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}$ est un polynôme annulateur de u de sorte que par le cours les valeurs propres réelles de u sont incluses dans l'ensemble des racines réelles de P, c'est-à-dire dans $\{0\}$. Ainsi 0 est la seule valeur propre réelle possible pour u.
Étant en dimension impaire, on sait que u admet au moins une valeur propre, qui est donc 0 par le raisonnement précédent. Ainsi l'espace propre associé $\mathrm{Ker}(u)$ n'est pas réduit au vecteur nul, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$. Enfin, si on avait $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}) = \{0\}$, la question précédente donnerait $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u)$, c'est-à-dire $u = 0$, ce qui est exclu par hypothèse.

1.4. On se donne $a \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ avec $a \neq 0$, ce qui est possible d'après la question précédente. On va prouver que $u(a)$ appartient lui aussi à $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$. On a $(u^2 + \mathrm{id})(u(a)) = u^3(a) + u(a) = 0$ puisque $u^3 = -u$, ce qui montre bien que $u(a) \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$. On va maintenant montrer que $(a, u(a))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$. Supposons que $\alpha a + \beta u(a) = 0$ $(\star)$. En composant par u dans $(\star)$ et en utilisant que $u^2(a) + a = 0$ (puisque $a \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$), on a $\alpha u(a) - \beta a = 0$ $(\star\star)$. Le calcul $\alpha \cdot (\star) - \beta \cdot (\star\star)$ donne alors $(\alpha^2 + \beta^2)a = 0$. Comme $a \neq 0$, il vient $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$ comme souhaité.
On observe que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}) \leqslant 2$ car si cette dimension était égale à 3, la question **1.2** donnerait $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, ce qui exclu par la question précédente. Ainsi $(a, u(a))$ est une famille libre à deux éléments de $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ qui est de dimension au plus 2 : c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ et ce sous-espace est de dimension 2. Grâce à la question **1.2**, on en déduit que $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1 et que si l'on prend (b) une base de $\mathrm{Ker}(u)$ alors par concaténation la famille $\beta = (b, u(a), a)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin, on remarque que $u(b) = 0$, $u(u(a)) = u^2(a) = -a$ et $u(a) = u(a)$ de sorte que la matrice de u dans la base β est bien M.

2. 2.1. La fonction $f : t \mapsto t^2/(e^t - 1)$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, la fonction f est équivalente à $t \mapsto t$ qui admet une limite lorsque t tend vers 0. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable au voisinage de 0. En $+\infty$, on remarque que $t \mapsto t^2 f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées, ce qui permet de justifier l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$. Ainsi J est bien définie.

2.2. Par développement en série entière usuel, on peut écrire :

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1} = \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t^2 e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{t^2 e^{-(n+1)t}}_{= u_n(t)}$$

Ainsi on a :

$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On va maintenant appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour échanger intégrale et somme. Les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues sur $]0, +\infty[$ et intégrables sur $]0, +\infty[$ (prolongeables par continuité en 0 et $t^2 u_n(t) \to 0$ au voisinage de $+\infty$). La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers f qui est continue sur $]0, +\infty[$. Enfin, on obtient facilement par double intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^3}$$

et cette dernière quantité est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi le théorème s'applique, on peut échanger intégrale et somme et il vient :

$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Planche A7 — CCINP 2024

1. **1.1.** Énoncer le théorème des accroissements finis.

1.2. Pour $t \in [0,1]$, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

1.3. Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n e^t$. Montrer que :

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|g_n'(t)\right| \leqslant \frac{e^t}{n}$$

1.4. Démontrer que :

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| \leqslant \frac{te^t}{n}$$

1.5. On pose pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t\,\mathrm{d}t$$

Monter que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et même uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction I à déterminer.

2. On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $u(\mathrm{M}) = a\mathrm{M} + b\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

2.1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de u.

2.3. Donner les éléments propres de u.

Solution

1. **1.1.** Voir le cours.

1.2. Limite classique que l'on prouve par passage sous forme exponentielle à l'aide de l'équivalent usuel $\ln(1+u) \sim_0 u$. On trouve e^{-t}.

1.3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est dérivable sur $[0,1]$ et on trouve après factorisation :

$$\forall t \in [0,1], \quad g_n'(t) = -\frac{t}{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} e^t$$

Pour $t \in [0,1]$, on a $\frac{t}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ et $(1 - \frac{t}{n})^{n-1} \leqslant 1$ de sorte que l'on peut écrire :

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|g_n'(t)\right| \leqslant \frac{e^t}{n}$$

1.4. On fixe $t \in [0,1]$. La fonction g_n est continue sur $[0,t]$ et dérivable sur $]0,t[$ donc, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,t[$ tel que $g_n(t) - g_n(0) = tg_n'(c)$. Cela permet d'écrire avec la question précédente :

$$\left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| = \left|g_n(t) - g_n(0)\right| = t\left|g_n'(c)\right| \leqslant t\frac{e^c}{n} \leqslant \frac{te^t}{n}$$

où l'on utilisé $c \leqslant t$ et donc $e^c \leqslant e^t$ pour la dernière majoration. Cela conclut la question.

1.5. On va prouver que la suite de fonctions $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction identité $\mathrm{I} : x \mapsto x$, ce que l'on peut deviner en passant formellement à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ sur l'expression de I_n grâce à la question **1**. On fixe $x \in [0,1]$. On écrit :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}_n(x) - \mathrm{I}(x)| &= \left|\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t - x\right| \\
&= \left|\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^x (g_n(t) - 1)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^x \left|g_n(t) - 1\right|\,\mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \int_0^x \frac{te^t}{n}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(question } \mathbf{1.4}\text{)} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_0^x e\,\mathrm{d}t \qquad (t \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } e^t \leqslant e^x \leqslant e) \\
&\leqslant \frac{e}{n} \qquad (x \leqslant 1)
\end{aligned}$$

La quantité obtenue est indépendante de $x \in [0,1]$ et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit bien la convergence uniforme de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers I sur $[0,1]$.

2. 2.1. Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a clairement $u(\mathrm{M}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la linéarité est claire par linéarité de la transposition. Ainsi $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

2.2. On fixe $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on réalise le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
u \circ u(\mathrm{M}) &= u(u(\mathrm{M})) \\
&= a(a\mathrm{M} + b\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) + b(a\mathrm{M}^{\mathrm{T}} + b\mathrm{M}) \\
&= (a^2 + b^2)\mathrm{M} + 2a(b\mathrm{M}^{\mathrm{T}}) \\
&= (a^2 + b^2)\mathrm{M} + 2a(u(\mathrm{M}) - a\mathrm{M}) \\
&= 2au(\mathrm{M}) + (b^2 - a^2)\mathrm{M}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 2a\mathrm{X} + (a^2 - b^2)$ est un polynôme annulateur de degré 2 de u.

2.3. Par le cours, on déduit de la question précédente que le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P, à savoir $\{a-b, a+b\}$. Il faut remarquer que ces deux éventuelles valeurs propres sont peut-être confondues. En résolvant $a - b = a + b$, on voit que c'est le cas si $b = 0$. Ainsi :

- Si $b = 0$, $u = a\,\mathrm{Id}$, $\mathrm{sp}(u) = \{a\}$ et l'espace propre associé est $\mathrm{E}_a(u) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Sinon, u a deux valeurs propres distinctes $a-b$ et $a+b$. En résolvant les équations $u(\mathrm{M}) = (a \pm b)\mathrm{M}$, on trouve facilement que les espaces propres associés sont $\mathrm{E}_{a-b}(u) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{E}_{a+b}(u) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

On observe que u diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres fait tout le temps $n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$).

B. Concours Mines – Télécom

Planche B1 — Mines – Télécom 2024

1. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1.1. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

1.2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
Donner le rang de f.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^4$ tel que la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ soit A.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$ et $g(x) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

2.1. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$$

2.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t + nt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t + nt)\,\mathrm{d}t$$

Solution

1. 1.1. On note $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On rappelle que par définition de u, la matrice de u dans la base canonique est A. On peut directement affirmer en lisant la matrice A ou éventuellement en résolvant $\mathrm{AX} = 0$ que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. Enfin, l'image de A est engendrée par ses colonnes, ce qui donne $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. On remarque que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

1.2. Grâce à l'hypothèse $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ et le théorème du rang, on obtient directement que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, ce qui donne $\mathrm{rg}(f) = 2$.
$\mathrm{Im}(f)$ étant de dimension 2 par ce qui précède, on se donne une base de ce sous-espace et on la note (e_3, e_4). Par définition de l'image, il existe des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ que l'on note e_1 et e_2 tels que $f(e_1) = e_3$ et $f(e_2) = e_4$. Étant donné que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, on a aussi $f(e_3) = f(e_4) = 0$, ce qui montre que la matrice de f dans la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est A comme souhaité. Il reste à prouver que la famille est bien une base de $\mathbb{R}^4$. Pour ce faire, on suppose que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 = 0 \quad (\star)$. En composant par f, en utilisant la linéarité de f et les relations précédentes, on obtient $\alpha e_3 + \beta e_4 = 0$. Or (e_3, e_4) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ donc elle est libre et il vient $\alpha = \beta = 0$. En réinjectant dans $(\star)$ et en utilisant de nouveau le fait que (e_3, e_4) est libre, on obtient aussi $\gamma = \delta = 0$. Finalement, la famille est bien libre, et étant de cardinal 4, c'est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

2. 2.1. On fixe $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la valeur de la somme d'une série exponentielle complexe (qui est bien convergente), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} = e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x))$$

En prenant les parties réelle et imaginaire de cette identité, on obtient les relations souhaitées.

2.2. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on étudie l'intégrale I_n, le cas de J_n se traitant de façon analogue. Par formule d'addition du cosinus, on a :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Pour la première intégrale, on utilise la question **2.1** pour écrire :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(kt)\cos(nt)}{k!}\,\mathrm{d}t$$

La série de fonctions au sein de l'intégrale est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[0,2\pi]$ puisque :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall t\in[0,2\pi],\quad \left|\frac{\cos(kt)\cos(nt)}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{k!}$$

et $1/k!$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, il est possible par le cours d'échanger série et intégrale et il vient :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos(kt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Enfin, on a directement :

$$\int_0^{2\pi}\cos(kt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((k+n)t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((k-n)t)\,\mathrm{d}t$$

La première intégrale vaut 0 sauf si $k=n=0$ auquel cas elle vaut π ; et la seconde vaut 0 sauf si $k=n$ auquel cas elle vaut π. En résumé, cela donne :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n=0 \\ \dfrac{\pi}{n!} & \text{sinon}\end{cases}$$

De la même façon, on trouverait :

$$\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \dfrac{\pi}{n!} & \text{sinon}\end{cases}$$

On conclut donc finalement que :

$$\mathrm{I}_n = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Un travail parfaitement analogue peut être mené sur J_n et on trouve que $\mathrm{J}_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Planche B2 — Mines – Télécom 2024

1. On considère la série :

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$$

1.1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Dans la suite, on notera S la somme de cette série entière sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

1.2. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants satisfaite par S sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

1.3. En déduire une expression de S.

2. On fixe $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3-\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-\mathrm{I}_n=0$.

2.1. Montrer que les valeurs propres de A sont incluses dans l'ensemble des racines du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-1$.

2.2. Calculer $\det(\mathrm{A})$.

2.3. Démontrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})\in\mathbb{N}$.

Solution

1. 1.1. Une application du critère de d'Alembert donne directement $\mathrm{R}=\sqrt{2}$.

1.2. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a, pour $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^{2n} \\
&= 1 + x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} x^{2k+1} \\
&= 1 + \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+2) \times k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} x^{2k+1} \\
&= 1 + \frac{x}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1) \times k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} x^{2k+1} \right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} S'(x) + \frac{x}{2} S(x)
\end{aligned}$$

Finalement, S vérifie l'équation différentielle suivante sur $]-R, R[$:

$$S'(x) - \frac{x}{2-x^2} S(x) = \frac{2}{2-x^2}$$

1.3. En résolvant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 (résolution de l'équation homogène puis méthode de la variation de la constante), on trouve qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = 2 \frac{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{2-x^2}}$$

En exploitant le fait que $S(0) = 0$, on trouve $C = 0$ et on conclut que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = 2 \frac{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}$$

2. 2.1. C'est une propriété de cours (qu'il faut redémontrer ici) puisque P est un polynôme annulateur de A. On observe que 1 est racine évidente de P puis par factorisation et résolution d'une équation du second degré que $-i$ et i sont les deux autres racines (complexes conjuguées) de P. Ainsi $\mathrm{sp}(A) \subset \{1, -i, i\}$.

2.2. Si l'on se place dans $\mathbb{C}$, on sait que le déterminant de A est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicités. Avec des notations évidentes, on obtient $\det(A) = 1^{m_1}(-i)^{m_{-i}} i^{m_i}$. Mais A étant réelle, on peut facilement montrer que $m_{-i} = m_i$ (voir le cours). Ainsi $\det(A) = (-i^2)^{m_i} = 1^{m_i} = 1$.

2.3. De même, en se plaçant sur $\mathbb{C}$, on sait que la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités. On a donc, en utilisant $m_i = m_{-i}$: $\mathrm{Tr}(A) = 1m_1 - im_i + im_i = 1m_1 = m_1 \in \mathbb{N}$.

PLANCHE B3 — MINES – TÉLÉCOM 2024

1. On considère la série :

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

1.1. Justifier que cette série est convergente.

1.2. En calculer sa somme.

2. On considère la fonction :

$$h : x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

2.1. Déterminer le domaine de définition D de h.

2.2. La fonction h est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Le cas échéant, la fonction h ainsi prolongée en 0 est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D \cup \{0\}$?

SOLUTION

1. 1.1. Pour $n \geqslant 1$, on remarque que :

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)+n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

La suite des $(1/n+1/(n+1))_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, ce qui prouve la convergence de la série étudiée par application du théorème spécial des séries alternées.

1.2. Pour calculer la somme, on écrit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1$$

Remarque : la séparation de la somme en deux sommes est licite puisque les deux séries obtenues sont convergentes en vertu du théorème spécial des séries alternées.

2. 2.1. La fonction est définie sur $\mathrm{D} =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.

2.2. Un équivalent usuel donne que h est équivalente à $-1/2$ au voisinage de 0. Ainsi la fonction h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = -1/2$. Dans la suite, on continue à noter h la fonction ainsi prolongée.

La fonction h étant clairement continue sur D par opérations sur les fonctions continues, elle est désormais continue sur $\widetilde{\mathrm{D}} = \mathrm{D} \cup \{0\}$. De plus, par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Grâce au théorème de la limite de la dérivée, h sera de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\widetilde{\mathrm{D}}$ si h' admet une limite en 0. On calcule donc h' et on trouve :

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad h'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x^3}(\ln(1+x) - x)$$

Grâce à un développement limité à l'ordre 3 du terme entre parenthèses, on obtient alors facilement que h' tend vers $1/3$ en 0, ce qui permet de conclure que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\widetilde{\mathrm{D}}$.

Planche B4 — Mines – Télécom 2024

1. On pose, pour $x > -1$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On définit également, pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = \int_{x-1}^{x} \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$$

1.1. Justifier que f est continue sur $]-1, +\infty[$.

1.2. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$ pour $x > 0$.

1.3. Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer φ'.

1.4. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

2. On considère une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^2 = \mathrm{I}_n$.

2.1. Montrer que M est inversible.

2.2. Justifier que M est symétrique.

2.3. En déduire M.

Solution

1. 1.1. On pose $g(t,x) = t^x e^{-t}$ pour $t > 0$ et $x > -1$. On va utiliser le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre pour prouver que f est continue sur $]-1, +\infty[$.

- Pour $t > 0$, $x \mapsto g(t,x) = t^x e^{-t} = e^{x\ln t} e^{-t}$ est continue sur $]-1, +\infty[$.
- Pour $x > -1$, $t \mapsto g(t,x) = t^x e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Pour $x \in [a, b] \subset]-1, +\infty[$ et $t > 0$, on a :

$$\left|g(t,x)\right| = \left|e^{x\ln t}e^{-t}\right| \leqslant \begin{cases} t^a e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[\\ t^b e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases} = \psi(t)$$

La fonction ψ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, au voisinage de 0, $\psi(t) \sim t^a = 1/t^{-a}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann) puisque $-a < 1$; et au voisinage de $+\infty$, on a $t^2\psi(t) = t^{2+b}e^{-t}$ qui tend vers 0 par croissances comparées, ce qui donne l'intégrabilité par critère de Riemann.

Ainsi le théorème s'applique et f est continue sur $]-1, +\infty[$.

1.2. Soit $x > 0$. Par intégration par parties généralisées, sous réserve de convergence du crochet généralisé, on a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^x}_{=u} \underbrace{e^{-t}}_{=v'} \,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

On remarque que le crochet est bien convergent et vaut 0 (valeur nulle en 0 et limite nulle en $+\infty$ par croissances comparées). On obtient donc : $f(x) = xf(x-1)$.

1.3. On peut facilement vérifier par positivité et caractère défini de l'intégrale que $f > 0$ sur $]-1, +\infty[$. Ainsi la fonction $t \mapsto \ln(f(t))$ est bien définie sur $]-1, +\infty[$ et elle est même continue par composition de fonctions continues grâce à la question **1.1**. Par théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que la fonction $\Phi : u \mapsto \int_0^u \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \ln(f(t))$. Par relation de Chasles, on a $\varphi(x) = \Phi(x) - \Phi(x-1)$ pour $x > 0$, ce qui prouve que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme et composition de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, on trouve par opérations et grâce à la question précédente :

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1) = \ln\left(\frac{f(x)}{f(x-1)}\right) = \ln(x)$$

1.4. D'après l'expression de φ' trouvée à la question précédente, on a $\varphi' \geqslant 0$ sur $[e, +\infty[$ de sorte que $(\varphi(n))_{n\geqslant 3}$ est une suite croissante. De plus, en primitivant φ', il existe une constante réelle C telle que $\varphi(x) = x\ln x - x + \mathrm{C}$ pour $x > 0$. On en déduit que $\varphi(n) \to +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$ est une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème spécial des séries alternées (à partir du rang 3 pour la décroissance de la valeur absolue du terme général) : elle converge.

2. **2.1.** La relation $\mathrm{M}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^2 = \mathrm{I}_n$ donne directement que M est inversible avec $\mathrm{M}^{-1} = (\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^2$.

2.2. Par propriété de cours, M^{T} est également inversible d'inverse $(\mathrm{M}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$. La relation de départ $\mathrm{M}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M})^2 = \mathrm{I}_n$, multipliée par M^{T} à gauche donne $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$ soit $(\mathrm{M}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$, c'est-à-dire $\mathrm{M} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$. Ainsi M est bien symétrique.

2.3. La relation de l'énoncé s'écrit désormais $\mathrm{M}^5 = \mathrm{I}_n$. De plus, comme M est symétrique réelle, par le théorème spectral, elle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale. On écrit donc $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. La relation $\mathrm{M}^5 = \mathrm{I}_n$ donne $\mathrm{PD}^5\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_n$ puis $\mathrm{D}^5 = \mathrm{I}_n$. On en déduit $\lambda_i^5 = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui donne $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Finalement $\mathrm{D} = \mathrm{I}_n$ puis $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

Planche B5 — Mines – Télécom 2024

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On pose :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ -1 & \mathrm{Y} \end{pmatrix}$$

1.1. Donner la loi de $\mathrm{Z} = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))$.

1.2. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, sous réserve d'existence, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$$

2.1. Donner le domaine D de définition de f.

2.2. À l'aide d'une comparaison série – intégrale, donner un équivalent de f en 1.
On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

Solution

1. 1.1. Grâce au théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2 - \mathrm{rg}(A)$. À l'aide du la méthode du pivot de Gauss, on peut alors calculer le rang de A selon les valeurs de X et Y et on en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X+Y=0 \\ 0 & \text{si } X+Y\neq 0 \end{cases}$$

On en déduit que Z ne prend que deux valeurs, à savoir 0 et 1, c'est donc une loi de Bernoulli et son paramètre est égal à $p = P(Z=1)$. Par $\sigma-$additivité et grâce au fait que X et Y soient indépendantes et de loi uniforme, il vient :

$$p = P(Z=1) = P(X+Y=0) = P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=-1) = 3\times\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

1.2. Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = \lambda^2 - (1+Y)\lambda + (X+Y)$. Son discriminant est $\Delta = (1+Y)^2 - 4(X+Y)$. Étant donné que X et Y sont à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, l'étude de Δ donne :

- $\underline{\Delta = 0 \iff (X,Y) = (1,-1) \text{ ou } (X,Y) = (0,1)}$: Dans ce cas, A a une une seule valeur propre double α et si A était diagonalisable, elle serait égale à αI_2, ce qui n'est pas réalisé. Ainsi A n'est pas diagonalisable dans ce cas.
- $\underline{\Delta < 0 \iff (X,Y) = (1,0) \text{ ou } (X,Y) = (1,1)}$: Dans ce cas, Le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et A n'est pas diagonalisable.
- $\underline{\Delta > 0}$: Dans ce cas, le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, A est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $(X,Y) \notin \{(1,-1),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Étant donnés la loi uniforme commune et l'indépendance des variables X et Y, il y a 9 cas possibles pour la valeur du couple (X,Y) et ces cas sont équiprobables avec une probabilité de $1/9$. Il vient donc que la probabilité que A soit diagonalisable est de $5/9$.

2. 2.1. Par application du critère de d'Alembert, on trouve facilement que la série entière définissant f est de rayon de convergence R égal à 1. Ainsi $]-1,1[\,\subset D \subset [-1,1]$. Reste donc à savoir si -1 et 1 sont dans D. Mais pour $x=-1$ et $x=1$, la série définissant $f(x)$ est grossièrement divergente (son terme général ne converge pas pour $x=-1$ et ne converge pas vers 0 pour $x=1$. Ainsi $D =]-1,1[$.

2.2. Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2\ln x}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par la méthode de comparaison série – intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_n^{n+1} e^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t \leqslant x^{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t$$

À gauche, on somme sur n de 0 jusqu'à $+\infty$; à droite, on somme sur n de 1 à $+\infty$ et on rajoute 1 (le premier terme de la somme définissant $f(x)$) de chaque côté. La relation de Chasles donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{t^2\ \ln x}\,\mathrm{d}t$$

Il faut remarquer que l'intégrale $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t$ qui est apparue est convergente (l'intégrande h est continue sur $[0,+\infty[$ et $t^2h(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées, ce qui donne l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ par critère de Riemann). De plus, par changement de variable $u = t\sqrt{-\ln x}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant, on a grâce à l'indication de l'énoncé :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}}$$

En remplaçant dans l'encadrement ci-dessus, par théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}}$$

D. Concours Centrale – Supélec

Planche C1 — Centrale 1 2024

On fixe $a > 0$ et on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{1+na}$.

1. Prouver la convergence de la série.
2. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$$

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3. Retrouver le résultat précédente avec un développement en série entière usuel.

Solution

1. La convergence de la série est une conséquence immédiate du théorème spécial des séries alternées qui s'applique bien ici puisque la valeur absolue du terme général est bien décroissante et de limite nulle.
2. Un développement en série entière usuel donne :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{na}$$

Ainsi on peut écrire :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{na}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n x^{na}}_{=\mathrm{S_N}}\,\mathrm{d}x$$

On va maintenant chercher à intervertir intégrale et limite à l'aide du théorème de convergence dominée. Les fonctions $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\geqslant 0}$ sont continues sur $[0,1[$ et convergent simplement vers $x \mapsto 1/(1+x^a)$ sur $[0,1[$ qui est elle-même continue sur $[0,1[$. Enfin, par sommation de termes géométriques, on a la domination suivante :

$$\forall \mathrm{N} \geqslant 0, \quad \forall x \in [0,1[, \quad |\mathrm{S_N}| = \left| \frac{1-(-1)^{\mathrm{N}+1} x^{(\mathrm{N}+1)a}}{1+x^a} \right| \leqslant 2$$

et la fonction constante égale à 2 est continue et intégrable sur $[0,1[$. Ainsi le théorème s'applique, on peut échanger limite et intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} &= \int_0^1 \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n x^{na}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n x^{na}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n \int_0^1 x^{na}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{1+na} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}
\end{aligned}$$

En appliquant cette relation avec $a = 2$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

3. On rappelle le développement en série entière usuel suivant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$$

On va prolonger cette égalité par continuité au point 1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n/(2n+1)x^n$ a un terme général continu sur $[0,1]$ et, pour $x \in [0,1]$, la série vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées de sorte que l'on a la majoration suivante du reste :

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall \mathrm{N} \geqslant 0, \quad |\mathrm{R_N}(x)| \leqslant \left| \frac{(-1)^{\mathrm{N}+1}}{2\mathrm{N}+3} x^{\mathrm{N}+1} \right| \leqslant \frac{1}{2\mathrm{N}+3} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0,1]$. Par théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, la fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/(2n+1)x^n$ est continue sur $[0,1]$ et en particulier en 1. Cela permet de conclure avec la relation rappelée en début de question :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$$