PRÉPARATION À L'ORAL

SESSION 2024

RAPPELS SUR LE DÉROULEMENT DES ORAUX

▶ **CCINP** du 24 juin au 20 juillet 2024
L'oral s'organise en **un temps de préparation de 30mn suivi d'un temps de passage de 30mn**.
Le sujet à préparer comprend un exercice que l'on présentera pendant 20 minutes, les 10 minutes restantes étant dédiées à des questions diverses et variées sans préparation sur l'ensemble du programme.

▶ **MINES – TÉLÉCOM** du 25 juin au 12 juillet 2024
L'oral s'organise en **un temps de passage de 30mn sans préparation**.
Le sujet comprend deux exercices portant sur deux parties différentes du programme.

▶ **MINES – PONTS** du 24 juin au 20 juillet 2024
L'oral s'organise en **un temps de préparation de 15mn suivi d'un temps de passage de 50 minutes à 1h**.
Le sujet comprend au moins deux exercices, l'un donné au début des 15 minutes de préparation et les autres sans préparation au cours du passage à l'oral.

▶ **CENTRALE – SUPÉLEC** du 24 juin au 21 juillet 2024
L'oral s'organise en deux épreuves :

- **MATHÉMATIQUES 1** : l'épreuve comporte **un temps de passage de 30mn sans préparation**.
  Le sujet comprend un exercice.
- **MATHÉMATIQUES 2** : l'épreuve comporte **un temps de préparation de 30mn suivi d'un passage de 30mn**.
  Le but de l'épreuve est de résoudre un problème mathématique en faisant appel à l'outil informatique (Python, Scilab,...). Ce dernier est mis à disposition dès le temps de préparation.

Pour de plus amples informations sur le déroulement des épreuves orales, vous pouvez consulter les rapports et notices de chacune des banques de concours sur la page suivante :

`https://www.sdemoor.fr/oraux/`

Planches d'oraux

A. Concours CCINP

Planche A1 — CCINP 2023

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

1.1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

1.3. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.
En calculer la somme lorsque cela est possible.

1.4. Prouver qu'il y a convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0, a]$ avec $a > 0$.

1.5. Justifier qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. On se donne $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices telles que $AC = CB$.

2.1. Énoncer le théorème de Cayley – Hamilton.

2.2. Montrer que $A^k C = CB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.3. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, justifier que $P(A)C = CP(B)$.

2.4. Montrer qu'un produit de deux matrices est inversible si et seulement si chacune des deux matrices est inversible.

2.5. On suppose $C \neq 0$. Justifier que A et B ont au moins une valeur propre commune.

2.6. Réciproquement, on suppose que A et B ont au moins une valeur propre commune. Montrer qu'il existe une matrice $C \neq 0$ vérifiant $AC = CB$.

Solution

1. 1.1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $f_n(x)$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. Par étude de fonction et grâce à la formule de Stirling, on a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|f_n(x) - 0\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x) = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

1.3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, en reconnaissant une série exponentielle, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} e^x = 1$$

Cela prouve la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et en donne la somme.

1.4. Si $a > 0$, on a pour $n \geqslant a$:

$$\left\|f_n\right\|_{\infty,[0,a]} = \sup_{x\in[0,a]} \left|f_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,a]} f_n(x) = f_n(a) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente d'après la question précédente. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

1.5. Supposons par l'absurde que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Étant donné que chaque fonction f_n pour $n \in \mathbb{N}$ est de limite nulle en $+\infty$ par croissances comparées, le théorème de la double limite donnerait que la somme S de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ serait de limite nulle en $+\infty$, ce qui n'est pas possible puisque S est constante égale à 1 d'après la question **1.3**. Ainsi il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. 2.1. Voir le cours.

2.2. On procède par récurrence. En ce qui concerne l'initialisation, le cas $k = 0$ donne $C = C$, ce qui est bien vérifié. Enfin, si le résultat est vrai au rang $k \in \mathbb{N}$, on a par hypothèse de récurrence et grâce à $AC = CB$:

$$A^{k+1}C = AA^kC = ACB^k = CBB^k = CB^{k+1}$$

ce qui conclut la phase d'hérédité.

2.3. On se donne $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et on écrit, grâce à la question précédente :

$$P(A)C = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) C = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k C = \sum_{k=0}^{d} a_k CB^k = C\left(\sum_{k=0}^{d} a_k B^k\right) = CP(B)$$

2.4. Un produit AB de matrices carrées est inversible si et seulement si on a $\det(AB) \neq 0$, ce qui équivaut à $\det(A)\det(B) \neq 0$, c'est-à-dire à A et B inversibles.

2.5. On suppose $C \neq 0$. On utilise la relation de la question **2.3** avec $P = \chi_B$. Cela donne grâce au théorème de Cayley–Hamilton la relation $\chi_B(A)C = 0$. Comme $C \neq 0$, il existe une colonne U de C qui est non nulle. La relation précédente donne en particulier que $\chi_B(A)U = 0$, c'est-à-dire que 0 est valeur propre de la matrice $\chi_B(A)$. Mais, par un résultat classique obtenu en trigonalisant la matrice A dans $\mathbb{C}$, on a que $\operatorname{sp}(\chi_B(A)) = \{\chi_B(\lambda),\ \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$. Puisque 0 est dans cet ensemble d'après le raisonnement qui précède, il existe $\lambda_0 \in \operatorname{sp}(A)$ tel que $\chi_B(\lambda_0) = 0$. Cela prouve que $\lambda_0 \in \operatorname{sp}(A) \cap \operatorname{sp}(B)$ et conclut la question.

2.6. On note λ_0 une valeur propre commune à A et B. Comme $\operatorname{sp}(B) = \operatorname{sp}(B^T)$, λ_0 est aussi valeur propre de B^T. On note X et Y des vecteurs propres de A et B^T associés à la valeur propre λ_0. On pose alors $C = XY^T$. Puisque X et Y sont des vecteurs propres, ils sont tous les deux non nuls et on peut facilement vérifier que C l'est aussi. Enfin, on a :

$$AC = AXY^T = \lambda_0 XY^T = X(\lambda_0 Y)^T = X(B^T Y)^T = XY^T B = CB$$

Planche A2 — CCINP 2023 (Partie 2 tombée en 2021)

1. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$. On définit alors :

$$F = \{f \in E,\ \forall x \in [-1,0],\ f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{g \in E,\ \forall x \in [0,1],\ g(x) = 0\}$$

Pour $(f, g) \in E^2$, on pose enfin :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1. Justifier que $(\cdot \mid \cdot)$ définit un produit scalaire sur E.

1.2. Montrer que $F \subset G^{\perp}$.

1.3. Prouver l'inclusion réciproque.
Pour $g \in G^{\perp}$, on pourra considérer la fonction f définie sur $[-1, 1]$ telle que $f = g$ sur $[-1, 0]$ et $f = 0$ sinon.

1.4. Prouver que la somme $F + G$ est directe. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

2.1. Justifier que a_n est bien défini pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2.3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

Solution

1. 1.1. Ce produit scalaire est un des exemples de référence du cours.

1.2. Soit $f \in F$. On se donne $g \in G$ quelconque et on remarque que, par relation de Chasles et par définitions des ensembles F et G :

$$(f\,|\,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{0} \underbrace{f(t)}_{=0} g(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\underbrace{g(t)}_{=0}\,dt = 0$$

Ainsi f est orthogonal à tout élément de G, ce qui donne $f \in G^\perp$. On a bien prouvé que $F \subset G^\perp$.

1.3. Soit $g \in G^\perp$. On définit la fonction f comme préconisé dans l'énoncé. On remarque que f est bien continue sur $[-1,1]$ (elle l'est sur $[-1,0[$ puisque g l'est, elle l'est également sur $]0,1]$ puisqu'elle est nulle ; enfin les limites à gauche et à droite en 0 sont toutes les deux nulles) et que $f \in G$ (on utilise $g(0) = 0$). Comme g est dans $G^\perp$, on a $(f\,|\,g) = 0$. Cela donne :

$$0 = (f\,|\,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{0} g^2(t)\,dt + \int_{0}^{1} \underbrace{f(t)}_{=0} g(t)\,dt = \int_{-1}^{0} g^2(t)\,dt$$

La fonction g^2 est ainsi continue positive est d'intégrale nulle sur $[-1,0]$. Par propriété de l'intégrale, on en déduit que $g = 0$ sur $[-1,0]$, c'est-à-dire que $g \in F$ comme souhaité.

1.4. Si $f \in F \cap G$, alors $f \in G^\perp \cap G$ puisque $F = G^\perp$ d'après les questions précédentes. On en déduit que f est orthogonale à elle-même, et donc qu'elle est nulle. Cela prouve que $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire que la somme $F + G$ est directe.
Enfin, si l'on avait $E = F \oplus G$, alors toute fonction de E serait la somme d'une fonction de F et d'une fonction de G. En particulier, toute fonction de E serait nulle en 0, ce qui n'est pas le cas. Ainsi F et G ne sont pas supplémentaires dans E.

2. 2.1. La série $\sum_{n\geqslant 0} 1/(1+n^2)$ est convergente par application du théorème de comparaison puisque son terme général est équivalent à $1/n^2$, terme général d'une série convergente. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, le terme a_n est bien défini en tant que reste d'ordre n de cette série.

2.2. On procède par comparaison série – intégrale. La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{1+t^2}$$

Pour $n \geqslant 0$, en sommant de $k = n+1$ à $N \geqslant n+1$ cet encadrement et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{1+t^2}$$

On calcule les intégrales des deux extrémités et on passe à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ pour avoir :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n+1) \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n)$$

Puisque $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 1/x = \pi/2$ pour $x > 0$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant a_n \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Étant donné que $\operatorname{Arctan} x \sim_0 x$, les deux extrémités sont équivalentes à $1/n$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, par encadrement, on en déduit que a_n équivaut à $1/n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.3. D'après la question précédente et par théorème de comparaison pour les rayons de convergence de séries entières, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n/n$. Ce dernier se calcule facilement, par exemple en utilisant la règle de d'Alembert, et on trouve 1. On conclut que $R = 1$.

Planche A3 — CCINP 2023

1. On fixe $n \geqslant 1$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi Binomiale de paramètres n et $1/2$. On définit alors la matrice aléatoire $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$$

1.1. En calculant de deux manières $(1+X)^{2n}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

1.2. Calculer la probabilité $P(X_1=X_2)$.

1.3. Donner la probabilité que M soit diagonalisable.

2. Pour $x\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$F(x)=\frac{x}{\operatorname{sh}x}\qquad\text{et}\qquad f_n(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$$

2.1. Rappeler le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

2.2. Montrer que F est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et que cette nouvelle fonction, toujours notée F, est bornée sur $\mathbb{R}$.

2.3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. On notera S la somme de cette série de fonctions.

2.4. Justifier que S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

2.5. Exprimer S avec la fonction F et en déduire un équivalent simple de S en 0.
On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2=\pi^2/6$.

2.6. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. 1.1. Grâce au binôme de Newton, on a d'une part :

$$(1+X)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^k$$

D'autre part, toujours grâce au binôme de Newton, on a :

$$(1+X)^{2n}=(1+X)^n(1+X)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)^2=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}X^{k+\ell}$$

En identifiant les coefficients devant le monôme X^n de ces deux écritures du polynôme $(1+X)^{2n}$ et utilisant une formule connue sur les coefficients binomiaux, il vient :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

comme souhaité.

1.2. On a directement grâce aux données de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
P(X_1=X_2)&=P\left(\cup_{k=0}^{n}(X_1=k,X_2=k)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k,X_2=k)\qquad\text{(par }\sigma-\text{ additivité)}\\
&=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(_2=k)\qquad\text{(par indépendance de }X_1\text{ et }X_2)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k}\qquad(X_1\text{ et }X_2\text{ suivent la loi }\mathscr{B}(n,1/2))\\
&=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\qquad\text{(par la question }\mathbf{1.1})
\end{aligned}$$

1.3. La matrice M est triangulaire donc son spectre est l'ensemble de ses coefficients diagonaux. Cela donne $\operatorname{sp}(M)=\{X_1,X_2\}$. Dès lors :

- Si $X_1\neq X_2$ alors M admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.
- Réciproquement, on suppose M est diagonalisable. Si jamais $X_1=X_2=\alpha$ alors M est diagonalisable avec une unique valeur propre α et vaut donc αI_2, ce qui n'est pas le cas. Donc $X_1\neq X_2$.

On vient de prouver que M est diagonalisable si et seulement si $X_1 \neq X_2$. On conclut avec la question précédente :

$$P(\text{M diagonalisable}) = P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

2. 2.1. Voir le cours.

2.2. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec l'équivalent $\operatorname{sh} x \sim_0 x$, on obtient que F tend vers 1 lorsque x tend vers 0 de sorte que l'on peut prolonger F en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $F(0) = 1$. Par une étude de fonction, on peut facilement prouver que $\operatorname{sh} x \leqslant x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui donne $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ pour $x > 0$. Ceci est également vérifié pour $x = 0$ puisque $F(0) = 1$ et cela se prolonge sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité de F. Ainsi F est bornée par 1.

Planche A4 — CCINP 2023

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1.1. Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2. Établir une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ pour $x > 0$.

1.3. Donner un équivalent de S en 0.

1.4. Faire de même en $+\infty$.

2. Soit E un espace euclidien dont on note $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme. On se donne $u \in \mathscr{L}(E)$ une isométrie de E et on pose $v = \mathrm{Id}_E - u$. On pose enfin :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \varphi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

2.1. Prouver que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.

2.2. Soit $x \in \operatorname{Im} v$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}(y - u^n(y))$$

Si $x \in \operatorname{Ker} v$, exprimer $\varphi_n(x)$.

2.3. En déduire que, pour tout $x \in E$, $\varphi_n(x)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers $p(x)$ où p est un projecteur orthogonal de E dont on donnera les caractéristiques.

Solution

1. 1.1. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ pour les sommes de séries de fonctions. On note dans la suite $u_n(x) = (-1)^n/(n!(x+n))$ pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$. Les fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement puisque, pour chaque $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on a $|u_n(x)| \leqslant 1/n!$ qui est le terme général d'une série convergente. Enfin, on a, pour $n \geqslant 1$:

$$\|u_n'\|_\infty = \sup_{x>0}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}\right| = \frac{1}{n^2 n!}$$

qui est le terme général d'une série convergente puisque multiplié par n^2 il tend vers 0. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème s'applique et donne que la somme $\widetilde{S}$ de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En remarquant que $S(x) = 1/x + \widetilde{S}(x)$ pour $x > 0$ et puisque $x \longmapsto 1/x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit bien que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2. On fixe $x>0$. Par changement de variable $n=n+1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)}\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n!(x+n)}\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n[(n+x)-x]}{n!(x+n)}\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\\ &= -\left(\frac{1}{e}-1\right)+x\left(\mathrm{S}(x)-\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

On conclut finalement que :

$$x\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(x+1)=\frac{1}{e}$$

1.3. Comme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **1.1**, S est en particulier continue en 1. Ainsi $\mathrm{S}(x+1)$ tend vers $\mathrm{S}(1)$ lorsque x tend vers 0. De plus :

$$\mathrm{S}(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{1}{e}$$

Avec la relation de la question précédente, on en déduit que $x\mathrm{S}(x)$ tend vers $\mathrm{S}(1)+1/e$, c'est-à-dire vers 1, quand x tend vers 0. Cela permet de conclure que :

$$\mathrm{S}(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}$$

1.4. On reprend les notations de la question **1.1**. On a, pour $n\geqslant1$, la domination $|u_n(x)|\leqslant 1/n!$ pour tout $x>0$ et $1/n!$ étant le terme général d'une série convergente, ceci prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant1}u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Toutes les fonctions $(u_n)_{n\geqslant1}$ étant de limite nulle en $+\infty$, le théorème de la double limite nous assure que la somme $\widetilde{\mathrm{S}}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant1}u_n$ est de limite nulle en $+\infty$. En rajoutant le terme $x\mapsto1/x$ qui est lui aussi de limite nulle en $+\infty$, on conclut que S est de limite nulle en $+\infty$. En passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ dans la relation de la question **1.2**, on obtient que $x\mathrm{S}(x)$ tend vers $1/e$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\mathrm{S}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{ex}$$

2. 2.1. On se donne $x\in\operatorname{Ker}v$, c'est-à-dire que $v(x)=0$ soit $u(x)=x$. Soit maintenant $y\in\operatorname{Im}v$ que l'on note $y=v(a)=a-u(a)$ avec $a\in\mathrm{E}$. On obtient par bilinéarité du produit scalaire et conservation du produit scalaire pour l'isométrie u :

$$(x\,|\,y)=(x\,|\,a-u(a))=(x\,|\,a)-(x\,|\,u(a))=(x\,|\,a)-(u(x)\,|\,u(a))=(x\,|\,a)-(x\,|\,a)=0$$

On vient de prouver l'inclusion $\operatorname{Ker}v\subset(\operatorname{Im}v)^\perp$. Pour justifier l'égalité, il est donc maintenant suffisant de prouver que les dimensions de ces deux sous-espaces sont les mêmes. Or, par propriété de cours et grâce au théorème du rang :

$$\dim\operatorname{Ker}v=\dim\mathrm{E}-\dim\operatorname{Im}v=\dim(\operatorname{Im}v)^\perp$$

Cela conclut la question.

2.2. Puisque $x\in\operatorname{Im}v$, on écrit $x=v(y)=y-u(y)$ avec $y\in\mathrm{E}$. Dès lors, par téléscopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1}u^k(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[u^k(y)-u^{k+1}(y)\right]=u^0(y)-u^n(y)=y-u^n(y)$$

On obtient le résultat de l'énoncé par division par $n\geqslant1$.
Si maintenant $x\in\operatorname{Ker}v$, on a $v(x)=0$ soit $u(x)=x$. On prouve alors facilement par récurrence que $u^k(x)=x$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Ainsi on obtient directement :

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x=\frac{1}{n}(nx)=x$$

2.3. Par le cours, et avec la question **2.1**, on a $E = \operatorname{Im} v \oplus (\operatorname{Im} v)^{\perp} = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} v$. Soit $x \in E$, que l'on décompose dans la somme directe précédente sous la forme $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Im} v$ et $b \in \operatorname{Ker} v$. Dès lors, grâce à la question précédente :

- Il existe $y \in E$ pour lequel on peut écrire $\varphi_n(a) = (y - u^n(y))/n$. On obtient par inégalité triangulaire et par le fait que u soit une isométrie :
$$0 \leqslant \left\|\varphi_n(a)\right\| = \left\|\frac{1}{n}(y - u^n(y))\right\| \leqslant \frac{1}{n}(\|y\| + \|u^n(y)\|) = \frac{2\|y\|}{n}$$
Par encadrement, on en déduit que $\varphi_n(a)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- De plus, $\varphi_n(b) = b$ tend clairement vers b lorsque n tend vers $+\infty$.

Par linéarité de φ_n, on en déduit que $\varphi_n(x)$ tend vers b lorsque n tend vers $+\infty$. Mais b est la composante de x dans sa décomposition dans la somme directe orthogonale $E = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} v$ donc si p désigne la projection orthogonale de E sur $\operatorname{Ker} v$ parallèlement à $\operatorname{Im} v$, on en déduit que $\varphi_n(x)$ tend vers $p(x)$. Ceci valant pour tout $x \in E$, on obtient le résultat souhaité.

Planche A5 — CCINP 2023

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence :
$$I_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n)\,dt$$

1.1. Prouver la convergence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2. Montrer que :
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$$

1.3. Établir que :
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$$

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie dont on note $\|\cdot\|$ la norme. On se donne $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant :
$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|$$

2.1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$.
Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$ puis calculer $f^n(y)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, y et x.

2.2. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$.

Solution

1. 1.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment. De plus, grâce à l'inégalité classique $0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \in [0,1]$, on a par croissance de l'intégrale :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$
Ainsi, par théorème d'encadrement, on a que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'intégrale définissant I_n, on réalise le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant $u = t^n$:
$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,du$$
Pour conclure, il suffit de montrer la convergence suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

On le prouve par application du théorème de convergence dominée en posant $f_n(u) = \ln(1+u)/u^{1-\frac{1}{n}}$ pour $n \geqslant 1$ et $u \in [0,1]$. Les fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sont continues sur $[0,1]$ (par prolongement par continuité en 0) et la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $u \mapsto \ln(1+u)/u$ qui est continue sur $[0,1]$ (par prolongement par continuité en 0). Enfin, on la domination suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall u \in [0,1], \quad \left|f_n(u)\right| = \left|\frac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\right| \leqslant \frac{\ln(1+u)}{u}$$

et cette fonction est continue et intégrable sur $[0,1]$. Le résultat est donc démontré.

1.3. Grâce à la question précédente, le résultat sera démontré si l'on prouve que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{12}$$

Par développement en série entière usuel de $u \mapsto \ln(1+u)$, on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Avant de poursuivre, il faut justifier l'échange série – intégrale en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. On pose $f_n(u) = (-1)^{n-1}u^{n-1}/n$ pour $u \in [0,1[$ et $n \geqslant 1$. Les $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sont intégrables sur $[0,1[$ (car continues) et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers $u \mapsto \ln(1+u)/u$ qui est continue par morceaux sur $[0,1[$ (après prolongement par continuité en 0). Enfin, on remarque que la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 \left|f_n\right| = \sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge. Ainsi l'échange est justifié. Pour conclure, avec le résultat admis par l'énoncé, on observe que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(dans le calcul, les termes d'indice pair se doublent tandis que ceux d'indice impair s'annulent). On conclut bien, comme souhaité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}$$

2. 2.1. Puisque $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, il existe bien $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(y) - y$. On a aussi $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ donc $f(x) = x$. En composant par f dans la relation $x = f(y) - y$, il vient $x = f^2(y) - f(y)$. En itérant ce procédé (et en le prouvant par récurrence), on obtient facilement que $x = f^{k+1}(y) - f^k(y)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On obtient alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par téléscopage :

$$f^n(y) = y + \sum_{k=0}^{n-1}\left(f^{k+1}(y) - f^k(y)\right) = y + \sum_{k=0}^{n-1} x = y + nx$$

2.2. On sait que $\|f(a)\| \leqslant \|a\|$ pour $a \in \mathrm{E}$ et on peut facilement prouver par récurrence que $\|f^p(a)\| \leqslant \|a\|$ pour $a \in \mathrm{E}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit, avec la question précédente et par inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant \|x\| = \left\|\frac{1}{n}\left(f^n(y) - y\right)\right\| \leqslant \frac{1}{n}\left\|f^n(y)\right\| + \frac{1}{n}\|y\| \leqslant \frac{2}{n}\|y\|$$

À la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient par encadrement que $\|x\| = 0$. On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$. Avec le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}$, on obtient $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, ce qui permet de conclure que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.

Planche A6 — CCINP 2023

1. Pour x réel on pose, sous réserve d'existence :

$$\mathrm{F}(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Déterminer le domaine de définition de F.

1.2. Pour $x \in [0,1]$, montrer que :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

1.3. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que :

$$F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln x$$

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

2. Soit E un espace euclidien dont on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire.

2.1. On se donne $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Montrer que :

$$(\forall x \in E\setminus\{0\}, \quad (x\,|\,u(x)) > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

2.2. Soient a et b deux endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.
Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathscr{L}(E)$ tel que $b = a\circ c + c\circ a$.

2.3. Montrer que c est autoadjoint défini positif.

Solution

1. 1.1. La fonction $t \mapsto \ln(1-t)/t$ est continue sur $[0,1[$ (par prolongement par continuité en 0 grâce à un équivalent usuel. Ainsi F est au moins définie sur $[0,1[$ et n'est pas bien définie sur $[0,1]^c$. Il reste à étudier la bonne définition ou non de F(1), ce qui revient à prouver la convergence de l'intégrale au voisinage de 1. Par croissance comparée, on a $\sqrt{1-t}\ln(1-t)/t$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 1, ce qui permet de conclure à la convergence de l'intégrale au voisinage de 1 par comparaison à une intégrale de Riemann. Finalement, F est définie sur $[0,1]$.

1.2. Soit $x \in [0,1]$. Par développement en série entière usuel de $t \mapsto -\ln(1-t)$, on a :

$$F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

Il reste simplement à justifier l'échange série – intégrale en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. On pose $u_n(t) = t^{n-1}/n$ pour $t \in [0,x[$ et $n \geqslant 1$. Les $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sont intégrables sur $[0,x[$ (car continues) et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers $t \mapsto \ln(1-t)/t$ qui est continue par morceaux sur $[0,x[$. Enfin, la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^x |u_n| = \sum_{n\geqslant 1} x^n/n^2$ converge (le terme général est majoré par $1/n^2$). Ainsi l'échange est justifié et on obtient le résultat.

1.3. Soit $x \in]0,1[$. Par relation de Chasles puis changement de variable $s = 1-t$ (de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissant), on a :

$$F(1-x) = -\int_0^{1-x}\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt + \int_{1-x}^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = F(1) + \int_0^x \frac{\ln s}{1-s}\,ds$$

Grâce au résultat de la question précédente et l'indication de l'énoncé, on a $F(1) = \pi^2/6$ et il vient alors :

$$\begin{aligned} F(x) + F(1-x) &= \frac{\pi^2}{6} - \int_0^x \left(\frac{\ln(1-t)}{t} - \frac{\ln t}{1-t}\right) dt \\ &= \frac{\pi^2}{6}\,[-\ln(t)\ln(1-t)]_0^x \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln x \end{aligned}$$

Il faut remarquer que le crochet (généralisé) est nul en 0 car $-\ln(t)\ln(1-t) \sim_0 t\ln(t)$ qui tend vers 0 en 0 par croissance comparée.

2. 2.1. C'est une propriété de cours.

2.2. On va résoudre le problème de façon matricielle. On pose :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & C & \longmapsto & AC + CA \end{array}$$

On peut vérifier facilement que l'application est bien définie (au sens où $AC + CA$ est bien symétrique si C) et linéaire. La question sera résolue si l'on prouve que φ est bijective. Les espaces de départ et d'arrivée ayant même dimension, il suffit pour ce faire de prouver que φ est injective. On se donne donc $C \in \operatorname{Ker}\varphi$, c'est-à-dire une matrice symétrique vérifiant $AC + CA = 0$. La matrice A est symétrique donc diagonalisable par le théorème spectral. On écrit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tous strictement positifs d'après la question précédente. En remplaçant A par PDP^{-1} dans l'équation $AC + CA = 0$, il vient $D\widetilde{C} + \widetilde{C}D = 0$ avec $\widetilde{C} = P^{-1}CP$. On étudie alors le coefficient d'indice $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ de cette égalité matricielle. Après calcul et avec des notations évidentes, on obtient $\lambda_i \widetilde{c}_{i,j} + \lambda_j \widetilde{c}_{i,j} = 0$. Les réels λ_i et λ_j étant tous deux strictement positifs, ceci implique $\widetilde{c}_{i,j} = 0$. Ceci valant pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on obtient $\widetilde{C} = 0$ et donc $C = 0$. Finalement $\operatorname{Ker} C = \{0\}$ et φ est bien injective comme souhaité.

2.3. La matrice C est déjà symétrique grâce à la résolution de la question précédente. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est définie positive. Pour ce faire, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vecteur propre associé à une valeur propre λ de C, on part de la relation $B = AC + CA$ et on multiplie à gauche et à droite par X^T et X respectivement. Il vient :

$$X^TBX = X^TACX + X^TCAX = \lambda X^TAX + (CX)^TAX = \lambda X^TAX + \lambda X^TAX = 2\lambda X^TAX$$

Les matrices A et B étant définies positives, on a $X^TBX > 0$ et $X^TAX > 0$. La relation précédente impose donc $\lambda > 0$. Ainsi $\operatorname{sp}(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ et C est bien définie positive grâce au résultat de la question **2.1** traduit en version matricielle.

Planche A7 — CCINP 2023 (Partie 1 tombée en 2022)

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Montrer que Ψ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. Justifier que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3. Calculer $\Psi(0)$ et la limite de Ψ en $+\infty$.

1.4. Prouver qu'il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad \Psi'(x) = -A\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

1.5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = -2A^2$ et en déduire la valeur de A.

2. Soit $p \in \,]0,1[$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On se donne également N une variable indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p. On pose alors :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

2.1. Donner la loi de S_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Pour $x \in \,]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer la quantité :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

2.3. Donner la loi de Y.

Solution

1. 1.1. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Les hypothèses simples se vérifient directement et pour l'hypothèse de domination on peut écrire :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

1.2. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre. Les hypothèses simples se vérifient directement et pour l'hypothèse de domination on peut écrire :

$$\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \left|-e^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant e^{-a(1+t^2)}$$

et on peut vérifier que cette fonction est positive, continue par morceaux et intégrable (critère de Riemann) sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \quad \Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1.3. On a directement $\Psi(0) = \pi/2$. Pour la limite en $+\infty$, on remarque que par positivité et croissance de l'intégrale, on a :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi e^{-x}}{2}$$

Par encadrement, on en déduit que Ψ tend vers 0 en $+\infty$.

1.4. Soit $x > 0$. On a :

$$\Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{x}t}{=} -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u}_{=\mathrm{A}} = -\mathrm{A}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

1.5. On commence par écrire, grâce à la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{A}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{u=\sqrt{x}}{=} -2\mathrm{A}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\mathrm{A}^2$$

Mais on a aussi, avec la question **1.3** :

$$\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = [\Psi(x)]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

En égalisant les deux expressions, il vient $\mathrm{A}^2 = \pi/4$ et donc $\mathrm{A} = \sqrt{\pi}/2$ puisque $\mathrm{A} \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

2. 2.1. On a $\mathrm{S}_0 = 0$ par convention, qui est une variable aléatoire presque sûrement nulle. Si $n \geqslant 1$, S_n comptabilise le nombre de succès d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p et suit donc une loi Binomiale de paramètres n et p.

2.2. On note $\mathrm{I} =]-1, 1[$. Par développement en série entière usuel, on sait que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

La série entière de gauche est de rayon de convergence 1 : sa somme est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et on obtient ses dérivées successives en dérivant terme à terme. À droite, la fonction en présence est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et on peut facilement obtenir ses dérivées successives (par conjecture et preuve par récurrence). On obtient donc en dérivant $k \in \mathbb{N}$ fois la relation précédente :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

En divisant par $k!$, il vient :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

2.3. On commence par écrire $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$. On se donne ensuite $k \in \mathbb{N}$ et on distingue deux cas :

- Si $k > 0$, on a grâce à la formule des probabilités totales, à la question **2.1** et à la question **2.2** :

$$\begin{aligned}
P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(N=n)}(Y = k)P(N = n) &= P_{(N=0)}(Y = k)P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(Y = k)P(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k)P(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}(1-p)^n p \\
&= p^{k+1}(1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} ((1-p)^2)^{n-k} \\
&= \frac{p^{k+1}(1-p)^k}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^k}{(2-p)^{k+1}}
\end{aligned}$$

- Si $k = 0$, par sommation géométrique, on obtient grâce à au point précédent :

$$P(Y = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1 - \frac{1-p}{(2-p)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} = 1 - \frac{(1-p)(2-p)}{(2-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

  On remarque que la formule du cas précédent s'étend au cas $k = 0$.

Finalement, on observe que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1/(2-p)$.

Planche A8 — CCINP 2023

1. Un centre d'appel reçoit des appels pour la maintenance de deux produits A et B. Il reçoit 80% d'appels pour le produit A et 20% d'appels pour le produit B et ce de façon indépendante. On note L la longueur de la première série d'appels concernant le même produit. Par exemple, si les appels sont AAAABA$\cdots$ alors $L = 4$.
On définit aussi X_A (respectivement X_B) comme étant le nombre d'appels reçus avant le premier appel pour le produit A (respectivement B).

1.1. Déterminer la loi de X_A sans calculs et donner, si elles existent, ses espérance et variance.
Faire la même chose pour X_B.

1.2. Déterminer la loi de L.

1.3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L = n) = \frac{2}{10}P(X_A = n) + \frac{8}{10}P(X_B = n)$$

1.4. Justifier l'existence et donner la valeur de l'espérance de L.

2. Soient $p,\ q \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose également que $p + q = \mathrm{Id}_E$ et que $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant n$.

2.1. Montrer que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont supplémentaires dans E.

2.2. Montrer que p et q sont deux projecteurs de E.

Solution

1. 1.1. La variable X_A correspond au rang du premier succès d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès (« l'appel concerne le produit A ») $p = 80/100$. Ainsi X_A suit une loi géométrique de paramètre p. On en déduit par le cours que $E(X_A) = 1/p = 5/4$ et $V(X_A) = (1-p)/p^2 = 1/32$.
Même principe avec X_B.

1.2. On a clairement $L(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec des notations d'événements plutôt claires, on a :

$$P(L = n) = P((A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A_{n+1}))$$

Les deux événements étant disjoints et les appels étant indépendants, on trouve (en notant toujours $p = 80/100$) :

$$P(L = n) = p^n(1-p) + (1-p)^n p$$

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition d'une loi géométrique, on sait que $P(X_A = n) = (1-p)^{n-1}p$ et que $P(X_B = n) = p^{n-1}(1-p)$. Avec la relation de la question précédente, on obtient donc bien :

$$P(L = n) = \frac{2}{10}P(X_A = n) + \frac{8}{10}P(X_B = n)$$

1.4. En multipliant par $n \in \mathbb{N}^*$ la relation précédente et en sommant de $n = 1$ à $+\infty$, on obtient immédiatement, grâce à la question **1.1** :

$$E(L) = \frac{2}{10}E(X_A) + \frac{8}{10}E(X_B) = \frac{2}{10}\frac{5}{4} + \frac{8}{10}5 = \frac{17}{4}$$

2. 2.1. Soit $x \in$ E. Comme $p + q = \mathrm{Id}_E$, on a $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Ainsi $E \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et l'inclusion réciproque étant triviale, on a $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Il reste à prouver que $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q = \{0\}$, ce qui sera la cas si on prouve que $\dim(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) = 0$. Avec la formule de Grassman, la relation précédente et la dernière hypothèse de l'énoncé, on a :

$$n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q) = \mathrm{rg}\, p + \mathrm{rg}\, q - \dim(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) \leqslant n - \dim(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) \leqslant 0$ et donc $\dim(\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) = 0$ comme souhaité.

2.2. Soit $x \in$ E. Puisque $p + q = \mathrm{Id}_E$, on a $p \circ p + q \circ p = p$ en composant par p à droite. Ainsi on obtient $p(x) = p \circ p(x) + q \circ p(x)$ en appliquant en x. On a donc les deux relations suivantes :

$$p(x) = \underbrace{p \circ p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{q \circ p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, q} \qquad \text{et} \qquad p(x) = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}\, q}$$

La somme $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ étant directe par la question précédente, la décomposition dans cette somme est unique et fournit donc en particulier $p \circ p(x) = p(x)$. Ceci valant pour tout $x \in$ E, on a $p \circ p = p$ et p est bien un projecteur de E. Par symétrie des rôles de p et q, il en est de même de q.

Planche A9 — CCINP 2023

1. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, sous réserve d'existence :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Donner l'ensemble de définition D de f.

1.2. Prouver que f est dérivable sur D et déterminer une expression de f'.
On pourra, pour x réel différent de ± 1*, chercher des réels* a_x *et* b_x *tels que :*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a_x}{1+t^2} + \frac{b_x}{1+x^2t^2}$$

1.3. En déduire une expression simple de f.

1.4. Prouver l'existence de 'intégrale suivante et la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ vérifiant $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = n$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{3n})$ vérifiant $v^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(v) = 2n$.

2.1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

2.2. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}_u$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_u}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

2.3. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v^2)$.

2.4. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}_v$ de $\mathbb{R}^{3n}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_v}(v) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

Solution

1. 1.1. Si $x = 0$, l'intégrale $f(0)$ est trivialement convergente. On se donne donc maintenant $x \neq 0$. L'intégrande $g_x : t \mapsto \operatorname{Arctan}(xt)/(t(1+t^2))$ est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, on a $g_x(t)$ qui est équivalent à x, de signe constant et intégrable au voisinage de 0. Au voisinage de $+\infty$, on peut écrire :

$$\forall t \geqslant 1, \quad |g_x(t)| = \left|\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2t^3}$$

qui est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemann). Par théorème de comparaison pour les fonctions de signe constant, on obtient que $f(x)$ converge.

1.2. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto g_x(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction g_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ (question précédente) ;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \partial g_x/\partial x(t,x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial g_x}{\partial x}(t,x)\right| = \left|\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

  et cette fonction est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

Pour exprimer f', on réalise la décomposition en éléments simples suggérée par l'énoncé. On trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)} - \frac{x^2}{(1-x^2)(1+t^2x^2)}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ différent de ± 1, on remplace cette décomposition dans l'intégrale définissant $f'(x)$ et on trouve après calculs :

$$f'(x) = \frac{\pi}{2(1-x^2)} - \frac{\pi x}{2(1-x^2)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

1.3. Par continuité de f' en 1, on sait que $f'(1)$ est la limite des $f'(x)$ quand x tend vers 1, ceci donne donc $f'(1) = \pi/4$ de sorte que l'expression de f' ci-dessus reste vraie pour $x = 1$. Par primitivation sur $\mathbb{R}_+$, en utilisant le fait que $f(0) = 0$, on obtient donc :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

Enfin, il suffit de remarquer que f est impaire pour obtenir :

$$\forall x < 0, \quad f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x)$$

1.4. Par intégration par parties généralisée sur $f(1)$ (en primitivant $t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)/(1+t^2)$), on obtient :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\operatorname{Arctan}^2(t)}{2t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2(t)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction Arctan étant bornée et équivalente $t \mapsto t$ en 0, le crochet est nul. On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2f(1) = \pi \ln 2$$

2. 2.1. Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. On écrit $x = u(a)$. Alors $u(x) = u^2(a) = 0$ de sorte que $x \in \operatorname{Ker}(u)$. Ainsi $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$. De plus, le théorème du rang sur u donne $\dim(\operatorname{Ker}(u)) + \operatorname{rg}(u) = 2n$ soit, puisque $\operatorname{rg}(u) = n$ d'après l'énoncé, $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = n = \operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

2.2. On se donne $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de $\operatorname{Im}(u)$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on écrit $f_i = u(e_i)$. On va prouver que $\mathscr{B}_u = (f_1, \ldots, f_n, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$. Cette famille est de cardinal $2n = \dim(\mathbb{R}^{2n})$ donc il suffit de prouver sa liberté. On écrit :

$$\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n + \mu_1 e_1 + \cdots \mu_n e_n = 0$$

Les vecteurs (f_i) étant dans l'image de u et donc dans son noyau (question précédente), il vient en composant par u :

$$\mu_1 f_1 + \cdots \mu_n f_n = 0$$

d'où l'on déduit la nullité des (μ_i) puisque $(f_1, \dots, f_n)$ est une base et forme donc une famille libre. En réinjectant cette information dans la première relation, on obtient ensuite la nullité des (λ_i) à nouveau par liberté de la famille $(f_1, \dots, f_n)$. Ainsi $\mathscr{B}_u$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$ et il est facile de vérifier que la matrice de u dans cette base est bien de la forme souhaitée.

2.3. Comme en **2.1**, on peut prouver que $\operatorname{Im}(v^2) \subset \operatorname{Ker}(v)$. Cela donne en particulier, avec le théorème du rang, que $\operatorname{rg}(v^2) \leqslant 3n - 2n = n$. On remarque ensuite que $\operatorname{Im}(v)$ est clairement un sous-espace stable par v, on peut donc considérer w, endomorphisme induit par v sur $\operatorname{Im}(v)$. On a que $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(v^2)$ et que $\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Ker}(v) \cap \operatorname{Im}(v)$. Ainsi, le théorème du rang appliqué à w donne $\dim(\operatorname{Ker}(w)) + \operatorname{rg}(w) = \operatorname{rg}(v)$ soit $\dim(\operatorname{Ker}(v) \cap \operatorname{Im}(v)) + \operatorname{rg}(v^2) = 2n$. On a ici $\dim(\operatorname{Ker}(v) \cap \operatorname{Im}(v)) \leqslant n$ (puisque $\operatorname{Ker}(v) \cap \operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(v)$ qui est de dimension n par le théorème du rang) et $\operatorname{rg}(v^2) \leqslant n$ (montré plus haut) avec leur somme qui vaut $2n$. Ainsi les deux quantités valent $2n$. On en déduit en particulier $\operatorname{rg}(v^2) = n = \dim(\operatorname{Ker}(v))$ et donc $\operatorname{Im}(v^2) = \operatorname{Ker}(v)$.

2.4. On se donne $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $\operatorname{Im}(v^2)$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on écrit $f_i = v^2(e_i)$. On peut alors, en s'insprirant de la méthode de la question **2.2**, prouver que $\mathscr{B}_v = (f_1, \dots, f_n, v(e_1), \dots, v(e_n), e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{3n}$ et vérifier ensuite que la matrice de v dans cette base est bien de la forme souhaitée.

Planche A10 — CCINP 2022

1. On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.2. Calculer ses dérivées partielles.

1.3. Prouver que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.4. Prouver l'existence et donner la valeur de $\partial^2_{x,y} f(0, 0)$ et $\partial^2_{y,x} f(0, 0)$.
Que peut-on en déduire ?

2. Pour $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose :

$$\varphi(A, B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t}\, dt$$

2.1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2.2. Justifier que $\varphi(X^k, 1) = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.3. Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.
Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de réels tels que :

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^k$$

2.4. On définit :

$$P = 1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (X + 1) \cdots (X + k)$$

Calculer $\varphi(1 - Q, X^i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et en déduire $P(i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.5. Donner une expression de P et de α_n.

2.6. Montrer que :

$$\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)^2 e^{-t}\, dt = \frac{1}{n+1}$$

Solution

1. **1.1.** Les fonctions $(x,y)\mapsto xy(x^2-y^2)$ et $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la seconde fonction ne s'annule qu'en $(0,0)$ de sorte que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^0$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, il reste donc à prouver la continuité de f en $(0,0)$.

On passe en coordonnées polaires, on pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ pour $r\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in\mathbb{R}$. En prenant la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ on a :

$$\|(x,y)\|\longrightarrow 0 \iff \sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow 0 \iff \sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\longrightarrow 0 \iff r\longrightarrow 0$$

Ainsi on obtient :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\lim_{r\to 0} r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0=f(0,0)$$

où l'on a utilisé que $|\cos^2-\sin^2|\leqslant 2$. Ainsi on a démontré que f est continue en $(0,0)$.

1.2. En tant que quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus, après calculs, on a :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x(y^4+4y^2x^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Il reste à étudier l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$. On a par définition de la dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0} 0=0$$

Ainsi $\partial_x f$ est bien définie en $(0,0)$ et vaut 0. De même $\partial_y f$ est bien définie en $(0,0)$ et vaut 0.

1.3. Étant donné l'étude ci-dessus, il reste simplement à vérifier que les dérivées partielles de f sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, on remarque qu'elles le sont sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tant que quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas et on étudie ensuite le cas particulier du point $(0,0)$ par un passage à la limite en coordonnées polaires comme en **1.1**. On trouve bien que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.4. Par définition, la dérivée partielle seconde $\partial^2_{y,x}f$ est obtenue comme dérivée partielle par rapport à la variable y de la dérivée partielle première $\partial_x f$ dont l'expression est donnée ci-dessus. On a donc, au point $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\partial_x f(0,y)-\partial_x f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=\lim_{y\to 0}-1=-1$$

De la même façon, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\partial_y f(x,0)-\partial_y f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

Les dérivées partielles croisées n'étant pas égales, le théorème de Schwarz ne s'applique pas. On peut en déduire que la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$, on pose :

$$\varphi(\mathrm{A},\mathrm{B})=\int_0^{+\infty}\mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2.1. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$. La fonction $t\mapsto \mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^2\mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t)e^{-t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées, cela permet d'affirmer la bonne convergence de l'intégrale définissant $\varphi(\mathrm{A},\mathrm{B})$. La symétrie de φ est triviale et les bilinéarité et positivité sont conséquences de la linéarité et de la positivité de l'intégrale. Enfin, pour le caractère défini, si $\varphi(\mathrm{A},\mathrm{A})=0$, étant donné que la fonction $t\mapsto\mathrm{A}(t)^2e^{-t}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, on obtient par caractère défini de l'intégrale que $\mathrm{A}(t)^2e^{-t}=0$ pour tout $t\geqslant 0$. On en déduit $\mathrm{A}=0$ sur $\mathbb{R}_+$ puis $\mathrm{A}=0$ puisque A admet alors une infinité de racines.

2.2. C'est classique. On montre que $\varphi(\mathrm{X}^{k+1},1)=(k+1)\varphi(\mathrm{X}^k,1)$ par une intégration par parties généralisées. On conclut alors par récurrence.

2.3. Par définition, un projeté (orthogonal ou non) appartient à l'espace sur lequel on projette (!). Ainsi $\mathrm{Q}\in\mathrm{Vect}(\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$ et il existe bien une suite $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que $\mathrm{Q}=\sum_{k=1}^n\alpha_k\mathrm{X}^k$.

2.4. D'une part, par propriété de cours, Q étant le projeté orthogonal de 1 sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$, $1-\mathrm{Q}$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Vect}(\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$. Cela donne directement $\varphi(1-\mathrm{Q},\mathrm{X}^i)=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

D'autre part, pour $i \in [\![1, n]\!]$, par bilinéarité et symétrie de φ et avec **2.2**, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(1-Q, X^i) &= \varphi\left(1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k X^k, X^i\right) = \varphi(1, X^i) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(X^k, X^i)\\ &= \varphi(1, X^i) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(X^{k+i}, 1)\\ &= i! - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(k+i)!\end{aligned}$$

En combinant les deux résultats précédents, on a, pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}i! - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(k+i)! = 0 \quad &\iff \quad 1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{(k+i)!}{i!} = 0\\ &\iff \quad 1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(i+1)(i+2)\cdots(i+k) = 0\\ &\iff \quad P(i) = 0\end{aligned}$$

On en déduit bien $P(i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.5. Le polynôme P est clairement de degré n et admet $1, 2, \ldots, n$ pour racines d'après la question précédente. Ainsi on peut l'écrire sous la forme :

$$P(X) = \lambda(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$$

où λ est une constante réelle. On remarque ensuite que $P(-1) = 1$ et en injectant dans l'expression ci-dessus, on trouve la valeur de λ. En conclusion :

$$P(X) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$$

Enfin, on remarque que le coefficient dominant de P est $-\alpha_n$ et en identifiant avec le coefficient dominant de l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\alpha_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2.6. On commence par remarquer que lorsque les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ parcourent $\mathbb{R}^n$, les $(-a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ également de sorte que :

$$\begin{aligned}I = \inf_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}(1+a_1t+\ldots+a_nt^n)^2e^{-t}\,dt &= \inf_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}(1-[-a_1t-\ldots-a_nt^n])^2e^{-t}\,dt\\ &= \inf_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}(1-[b_1t+\ldots+b_nt^n])^2e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement, en posant $V_n = \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)$, que $I = d(1, V_n)^2$ puis que $I = \|1-Q\|^2$ par propriété de cours. Par la question **2.4**, on obtient $\varphi(1-Q, Q) = 0$ et il vient donc par bilinéarité de φ :

$$I = \|1-Q\|^2 = \varphi(1-Q, 1-Q) = \varphi(1-Q, 1) - \varphi(1-Q, Q) = \varphi(1-Q, 1)$$

Il reste à calculer cette dernière quantité. Pour cela, on écrit par bilinéarité de φ et en utilisant l'expression de P obtenue à la question précédente :

$$I = \varphi(1-Q, 1) = \varphi(1,1) - \varphi(Q, 1) = \varphi(1,1) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(X^k, 1) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k k! = P(0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(-1)^n n! = \frac{1}{n+1}$$

.

Planche A11 — CCINP 2022

1. Pour $x \in]0, 1[$, on pose :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

Dans la suite, on s'intéresse également à $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

1.1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

1.2. Justifier que I converge.

1.3. Exprimer f comme la somme d'une série de fonctions sur $]0,1[$.

1.4. En déduire une expression de I.

2. Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P,Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$.

2.1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.

2.2. Donner une base orthonormée de E.

2.3. Soit $P \in E$. Exprimer P dans cette nouvelle base. Que remarque-t-on ?

2.4. Donner le projeté orthogonal de $P = X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ et en déduire la distance $d(P, \mathbb{R}_1[X])$.

Solution

1. **1.1.** Prendre un équivalent en 1 (éventuellement en posant $x = 1 - h$ avec h qui tend alors vers 0 lorsque x tend vers 1).

   1.2. L'intégrande est continu sur $]0,1]$ (fermé en 1 d'après la question précédente). On étudie ensuite le comportement en 0 par équivalent grâce au théorème de comparaison.

   1.3. Développer $x \mapsto 1/(x-1) = -1/(1-x)$ en série entière.

   1.4. Intégrer le développement en série précédent et justifier proprement l'échange série intégrale. Le calcul des intégrales $\int_0^1 x^n \ln x \,dx$ se fait par intégration par parties en dérivant $x \mapsto \ln x$.

2. **2.1.** Bilinéarité, symétrie, positivité sont claires. Pour la définie-positivité, on peut se servir de la formule de Taylor pour les polynômes de degré 2 au point 1 qui va bien montrer que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ implique $P = 0$.

   2.2. Appliquer Gram-Schmidt à $\mathscr{F} = (1, X, X^2)$.

   2.3. Se rappeler que dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, les coordonnées d'un vecteur x sont les produits scalaires $((x \mid e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

   2.4. Utiliser les formules du cours.

Planche A12 — CCINP 2022

1. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \emptyset$.

1.1. Prouver que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont des racines de P.

1.2. Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

1.3. Prouver que si $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $AX = XB$ équivaut à $X = 0$.

1.4. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, justifier qu'il existe une unique matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = AX - XB$.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs. On pose :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$

2.1. Exprimer $u_1 + u_2$ en fonction de $1/((1+a_1)(1+a_2))$. Généraliser.

2.2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

2.3. En calculer la somme lorsque $a_n = 1/\sqrt{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Solution

1. **1.1.** C'est du cours.

   1.2. En trigonalisant dans $\mathbb{C}$ la matrice B, on peut facilement montrer que les valeurs propres de $\chi_A(B)$ sont les $\chi_A(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$. On sait que $\chi_A(B)$ sera inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $\chi_A(B)$, c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$, ce qui est bien le cas sans quoi il existerait $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$, ce qui signifierait que λ est valeur propre de A et de B.

   1.3. Seul le sens direct est non trivial. On montre facilement par récurrence que $A^k X = X B^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Par combinaison linéaire, on en déduit que $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$, c'est-à-dire $X\chi_A(B) = 0$ grâce au théorème de Cayley-Hamilton appliqué à A. Comme $\chi_A(B)$ est inversible, cela donne $X = 0$ par « simplification ».

1.4. Montrer que $\psi : X \mapsto AX - XB$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en prouvant son injectivité grâce à la question précédente et par égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

2. 2.1. Soit $P_n = (1+a_1)\cdots(1+a_n)$ pour $n \geqslant 1$. On a $u_1 + u_2 = 1 - 1/P_2$ en utilisant la « technique du $+1-1$ ». On généralise ensuite par récurrence à :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{P_n}$$

2.2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à termes positifs, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Ainsi la suite $(1/P_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 et converge donc. Avec la question précédente, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc convergente : la série converge.

2.3. Dans ce cas, on obtient que $\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{k}})$ et on reconnaît une somme partielle de série à termes positifs divergente (puisque le terme général est équivalent à $1/\sqrt{n}$). Ainsi $\ln(P_n)$ tend vers $+\infty$, on en déduit que P_n tend vers $+\infty$ également et enfin que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ en passant à la limite dans la relation de la question **2.1.**.

Planche A13 — CCINP 2022

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note, sous réserve de convergence :

$$S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

1.1. Justifier l'existence des nombres $\left(S_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

1.2. Si $p \in \mathbb{N}$, exprimer S_p en fonction de $S_0,\ldots,S_{p-1}$.
On pourra développer $(n+1)^p$.

1.3. Prouver que $S_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose alors :

$$B = \begin{pmatrix} -aA & bA \\ cA & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(a,b,c) \in {\mathbb{R}^*}^3$ tel que $a+b=c$ et $b \neq -c$.

2.1. Exprimer χ_B de fonction de χ_A.

2.2. Donner les valeurs propres de B en fonction de celles de A.

2.3. Montrer que si $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est dans Ker(A) alors le vecteur $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{6,1}(\mathbb{R})$ est dans Ker(B).

2.4. Prouver que $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.

2.5. On suppose A diagonalisable avec $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ et on pose $a=3$, $b=-1$ et $c=2$.
Justifier que B est diagonalisable.

Solution

1. 1.1. On a $n^2 \times n^p/2^n$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, ce qui assure la convergence de la série dont la somme vaut S_p par critère de Riemann.

1.2. On se rapproche de l'indication avec un changement de variable $n = m+1$ après avoir remarqué que le terme d'indice $n = 0$ de la série est nul :

$$\begin{aligned}
S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+1)^p}{2^{m+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} m^k \qquad \text{(Binôme de Newton)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m^k}{2^m} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_k
\end{aligned}$$

En isolant le terme d'indice p qui donne $S_p/2$, et en le repassant du côté gauche de l'égalité, on obtient finalement :

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k$$

1.3. On le prouve par récurrence forte : $S_0 = 2 \in \mathbb{N}$ (série géométrique) et l'hérédité passe grâce à la relation de la question précédente.

2. 2.1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule le déterminant par blocs $\chi_B(\lambda)$ en faisant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ (on utilise $a + b = c$) puis $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$. On obtient alors un déterminant triangulaire par blocs :

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_3 + cA & -bA \\ 0 & \lambda I_3 - bA \end{vmatrix} = \det(\lambda I_3 + cA) \det(\lambda I_3 - bA) = -b^3 c^3 \chi_A(-\tfrac{\lambda}{c}) \chi_A(\tfrac{\lambda}{b})$$

où l'on a mis en facteur $-c$ et b dans les deux déterminants pour faire apparaître χ_A.

2.2. Les valeurs propres de B sont les racines de χ_B. Or $\chi_B(\lambda) = 0$ équivaut à (puisque b et c sont non nuls) $-\frac{\lambda}{c}$ annule χ_A ou $\frac{\lambda}{b}$ annule χ_A. On conclut donc :

$$\mathrm{sp}(B) = \{-c\mu,\ \mu \in \mathrm{sp}(A)\} \cup \{b\mu,\ \mu \in \mathrm{sp}(A)\}$$

en remarquant que ces deux ensembles ne sont pas les mêmes puisque $b \neq -c$ (sauf si $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$).

2.3. Simple calcul matriciel par blocs, on vérifie que $BY = 0$ en utilisant $AX = 0$.

2.4. On remarque de la manière que si $(X, Y) \in \mathrm{Ker}(A)^2$, alors $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est dans Ker(B). On en déduit :

$$\left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\ (X, Y) \in \mathrm{Ker}(A)^2 \right\} \subset \mathrm{Ker}(B)$$

et donc $2\dim(\mathrm{Ker}(A)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(B))$ en passant aux dimensions.

2.5. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ et que A est de taille 3, 0 est valeur propre de A de multiplicité $m \in \{2, 3\}$.

- Si $m = 3$, A est diagonalisable avec pour seule valeur propre 0 donc $A = 0$. Ainsi $B = 0$ et B est déjà sous forme diagonale.
- Si $m = 2$, 0 est valeur propre de A de multiplicité 2 et, étant diagonalisable, elle admet une autre valeur propre α de multiplicité 1. Avec la question précédente, on a $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geqslant 4$ donc 0 est valeur propre de B de multiplicité $p \in \{4, 5, 6\}$. Avec la question **2.2**, on sait que $\mathrm{sp}(B) = \{0, -\alpha, -2\alpha\}$. Ainsi B a deux autres valeurs propres ($-\alpha$ et -2α) que 0. De plus, ces deux autres valeurs propres sont de multiplicité au moins 1 et comme la somme des multiplicités vaut au plus 6, elles sont égales à 1 et $p = 4$. On en conclut que B est diagonalisable.

Planche A14 — CCINP 2022

1. 1.1. Démontrer que :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

et donner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la relation a bien un sens.

1.2. Rappeler le développement en série entière de la fonction Arctan.

1.3. Prouver la relation suivante :

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

1.4. Proposer une méthode pour approcher le nombre π et évaluer la marge d'erreur.

2. L'objectif est de prouver que la famille $((X+k)^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
On se donne donc des réels $(\lambda_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$.

2.1. Rappeler la valeur du déterminant de Vandermonde.

2.2. Prouver que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0$ pour tout $p \in [\![0,n]\!]$.

2.3. Justifier que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$ pour tout $p \in [\![0,n]\!]$.

2.4. Conclure.

Solution

1. 1.1. La quantité $\tan(2a)$ n'est définie que si $2a$ est dans le domaine de définition de tan, c'est-à-dire si l'on a $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Pour prouver la relation, on utilise les formules de duplication de l'angle $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

1.2. C'est du cours.

1.3. Avec la relation de la première question, on a :

$$1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Ainsi $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est racine de l'équation du second degré $x^2+2x-1=0$. Après résolution, et puisque $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$, il vient $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$. Enfin, en utilisant la question précédente, on a :

$$\frac{\pi}{8} = \mathrm{Arctan}(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

1.4. On note $S_N = 8\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$ pour $N \in \mathbb{N}$ qui est une approximation de π puisque $S_N \to \pi$ d'après la question précédente. Pour évaluer l'écart, on remarque que la série sous-jacente est alternée et vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées de sorte que :

$$|\pi - S_N| = \left|8\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}\right| \leqslant \left|8(-1)^{N+1}\frac{(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3}\right| = \frac{8(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3}$$

2. 2.1. C'est du cours.

2.2. On procède par récurrence descendante sur $p \in [\![0,n]\!]$. Le cas $p = n$ est clair et pour passer du rang $p \in [\![1,n]\!]$ au rang $p-1$, il suffit de dériver l'expression de l'hypothèse de récurrence au rang p.

2.3. Appliquer en 0 la relation précédente.

2.4. Écrire le système vérifié par les $(\lambda_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenu à la question précédente et remarquer que la matrice du système est une matrice de Vandermonde de déterminant non nul. Ainsi la solution de ce système est unique et, comme la solution avec des $(\lambda_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ tous nuls convient clairement, c'est la solution. En conclusion, la famille $((X+k)^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Planche A15 — CCINP 2022

1. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

1.1. Soient $R \in \mathbb{C}[X]$ et $(U,V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ avec U et V semblables. Montrer que $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

1.2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

1.3. Si A est diagonalisable et B nulle, prouver que M est diagonalisable.

1.4. Démontrer la réciproque.

2. **2.1.** Si $t \in [-1/2, 1/2]$, démontrer que $|\ln(1+t) - t| \leqslant 2t^2$.

2.2. Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{(-1)^n x}{n^2(1+x^2)}\right)$$

Solution

1. **1.1.** Écrire $\mathrm{R(X)} = \sum_{k=0}^{d} r_k \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{U} = \mathrm{PVP}^{-1}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et prouver que l'on a $\mathrm{R(U)} = \mathrm{PR(V)P}^{-1}$ en utilisant que $(\mathrm{PVP}^{-1})^k = \mathrm{PV}^k\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1.2. On commence par calculer les puissances de M. Après quelques essais, il semble, grâce au fait que les matrices A et B commutent, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^k & k\mathrm{A}^{k-1}\mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{A}^k \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut ensuite prouver rigoureusement par récurrence. Enfin, si $\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{X}^k$, on obtient par combinaison linéaire :

$$\mathrm{P(M)} = \sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{M}^k = \sum_{k=0}^{d} p_k \begin{pmatrix} \mathrm{A}^k & k\mathrm{A}^{k-1}\mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{A}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{A}^k & \sum_{k=0}^{d} k p_k \mathrm{A}^{k-1}\mathrm{B} \\ 0 & \sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{A}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P(A)} & \mathrm{P'(A)B} \\ 0 & \mathrm{P(A)} \end{pmatrix}$$

1.3. Si A est diagonalisable, on peut écrire $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ avec $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. On pose alors :

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{P} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que Q est inversible d'inverse :

$$\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{P}^{-1} \end{pmatrix}$$

et que, en utilisant la relation $\mathrm{B} = 0$, l'on a $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \Delta$, ce qui prouve bien que M est diagonalisable.

1.4. Réciproquement, on suppose M diagonalisable. Ainsi, par le cours, il existe un polynôme P annulateur de M qui est scindé à racines simples. Grâce à la question **1.2**, on obtient par identification $\mathrm{P(A)} = 0$ et $\mathrm{P'(A)B} = 0$. La première égalité donne qu'il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples (à savoir P) de sorte que, toujours pas le cours, A est diagonalisable. En trigonalisant A sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on montre facilement que $\mathrm{sp(P'(A))} = \{\mathrm{P'}(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{sp(A)}\}$. Si jamais $0 \in \mathrm{sp(P'(A))}$, il existerait $\lambda \in \mathrm{sp(A)}$ tel que $\mathrm{P'}(\lambda) = 0$. Comme P est annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de P. Ainsi on a aussi $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. On obtient que λ est racine au moins double de P, ce qui est absurde. Ainsi $0 \notin \mathrm{sp(P'(A))}$ et $\mathrm{P'(A)}$ est donc inversible. La seconde égalité donne donc $\mathrm{B} = 0$ après « simplification » par $\mathrm{P'(A)}$.

2. **2.1.** Soit $\mathrm{I} = [-1/2, 1/2]$. Réaliser une étude de fonction de $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$ sur I et observer que $f \leqslant 0$ sur I. Il suffit donc de prouver que $t - \ln(1+t) \leqslant 2t^2$ pour $t \in \mathrm{I}$, ce qui se fait par étude de la fonction $g : t \mapsto t - \ln(1+t) - 2t^2$ en montrant qu'elle est négative sur I.

2.2. On commence par remarquer que $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et donc que $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ par imparité. On en déduit immédiatement :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{(-1)^{n-1}x}{n^2(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{R}$$

On écrit ensuite, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\left(1 - \frac{(-1)^n x}{n^2(1+x^2)}\right) = \underbrace{\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}x}{n^2(1+x^2)}\right) - \frac{(-1)^{n-1}x}{n^2(1+x^2)}}_{a_n(x)} + \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}x}{n^2(1+x^2)}}_{b_n(x)}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} b_n(x)$ est alternée et vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Elle converge donc et on a :

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} b_n(x)\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{\mathrm{N}}x}{(\mathrm{N}+1)^2(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2(\mathrm{N}+1)^2} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0 \quad \text{(Indépendant de } x\text{)}$$

Cela nous donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ sur $\mathbb{R}$.

- On fixe $x \in \mathbb{R}$. Grâce l'inégalité de la question précédente et à (R), on peut écrire :

$$\forall n \geqslant 1, \quad |a_n(x)| \leqslant \frac{2x^2}{n^4(1+x^2)^2}$$

Le terme de droite étant un terme général de série de Riemann convergente, on en déduit, par théorème de comparaison et puisque convergence absolue implique convergence, que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Pour la convergence uniforme, on s'intéresse au reste et on réutilise l'inégalité précédente :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^4(1+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \text{(Indépendant de } x\text{)}$$

puisque l'on observe un reste d'une série de Riemann convergente. Ainsi on a également la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ sur $\mathbb{R}$. Par somme de séries de fonctions uniformément convergentes, la série de fonctions étudiée converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Planche A16 — CCINP 2022

1. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Calculer le polynôme caractéristique de M.

1.2. M est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

1.3. M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

1.4. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= -5x-4y-2z \\ y' &= 3x+5y+2z \\ z' &= 3x-2y \end{cases}$$

2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(a+b-x) = f(x)$$

2.1. Montrer que :

$$\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.2. En déduire la valeur de :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{te^{it}}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Solution

1. **1.1.** Après calculs on trouve $\chi_M(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   1.2. χ_M est réel et scindé donc M est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
   1.3. Comme 1 est valeur propre double de M et -2 valeur propre simple de M, la matrice M sera diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(M)) = 2$. Après calculs on trouve $\dim(E_1(M)) \neq 2$ de sorte que M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$
   1.4. On applique la méthode classique du cours dans le cas trigonalisable (on a $X' = MX = PTP^{-1}X$ puis on pose $Y = P^{-1}X$ et on résout $Y' = TY$ avant de revenir à X avec la formule $X = PY$).
2. **2.1.** Le résultat est immédiat grâce au changement de variable $t = a+b-u$ dans le membre de gauche de l'égalité à montrer.

2.2. On commence par décomposer $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, ce qui donne deux intégrales $I_{\cos}$ et $I_{\sin}$ à calculer. Pour la première intégrale, on pose $a = -\pi$, $b = \pi$ et on remarque que la fonction $f : t \in [-\pi, \pi] \mapsto \cos t/(1+\cos^2 t)$ vérifie $f(a+b-t) = f(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. On utilise alors la formule de la question précédente et on trouve $I_{\cos} = 0$. Pour la seconde intégrale, on commence par écrire, par parité de l'intégrande :

$$I_{\sin} = 2\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

puis on applique de nouveau la question précédente avec $a = 0$, $b = \pi$ et $f : t \in [0, \pi] \mapsto \sin t/(1+\cos^2 t)$. On trouve :

$$I_{\sin} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \overset{u=\cos t}{=} \pi\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\pi\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

En conclusion, $I = i\frac{\pi^2}{2}$.

Planche A17 — CCINP 2022

1. On rappelle que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1.1. Donner la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.2. Grâce à la question précédente, donner la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_0^{n} e^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad (M \mid N) = \mathrm{Tr}(M^{\mathrm{T}}N)$$

2.1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Dans les questions qui suivent, on travaille dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on introduit l'ensemble :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ puis donner $F^{\perp}$ et en fournir une base orthonormée.

2.3. Déterminer la distance de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $F^{\perp}$.

Solution

1. 1.1. Pour $n \geqslant 1$, on note :

$$u_n = \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{u_n}{n}$$

On montre facilement par positivité de l'intégrale que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs et décroissante. Il en est ainsi de même de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus, par convergence de l'intégrale mentionnée par l'énoncé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et il en est donc de même de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En conclusion, la série étudiée est alternée et vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées : elle converge.

1.2. On réalise le changement de variable $x = nt$ dans l'intégrale du terme général de la série puis on utilise la relation de Chasles avec la relation de l'énoncé :

$$\int_0^n e^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{n^2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2n} - v_n$$

Ainsi notre série est la différence des deux séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n v_n$$

qui sont toutes deux convergentes (la première par application du critère spécial des séries alternées, et la seconde grâce à la question précédente). Ainsi la série étudiée converge.

2. 2.1. C'est classique.

2.2. On obtient facilement que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de sorte que $F^{\perp}$ est également de dimension 2. Il suffit alors de trouver deux vecteurs de $F^{\perp}$ qui forment une famille orthonormée. On trouve par exemple :

$$F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

2.3. Il suffit de calculer le projeté orthogonal P de J sur $F^{\perp}$ avec la formule du cours (on dispose d'une base orthonormée de $F^{\perp}$) puis d'utiliser la formule $d(J, F^{\perp}) = \|J - P\|$.

Planche A18 — CCINP 2022

1. On étudie l'équation différentielle suivante sur $I = \mathbb{R}_+^*$:

$$t^2y'' + 3ty' + y = t + \frac{1}{t} \qquad (E)$$

1.1. Citer le théorème de Cauchy linéaire.

1.2. Soit f une fonction définie sur I. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur I si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on précisera.

1.3. En déduire l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E).

2. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $M^4 = 4M^2$ et que -2 et 2 sont valeurs propres de M.

2.1. Montrer que $\mathrm{sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$.

2.2. Prouver que M est diagonalisable.

Solution

1. 1.1. C'est du cours.

1.2. On suppose que f est solution de (E), f est alors deux fois dérivable sur I de sorte que g l'est sur $\mathbb{R}$ par composition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(x) = f(e^x), \qquad g'(x) = e^x f'(e^x) \qquad \text{et} \qquad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$$

On en déduit immédiatement, f étant solution de (E), que :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = e^{2x}f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + f(e^x) = e^x + e^{-x} = 2\,\mathrm{ch}\,x$$

Ainsi g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y'' + 2y' + y = \mathrm{ch}\,x \quad (E')$. Réciproquement, on suppose que g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E'). On a, pour $t > 0$, la relation $f(t) = g(\ln t)$. Cela permet de justifier que f est deux fois dérivable sur I puisque g l'est sur $\mathbb{R}$. Enfin, on peut alors facilement vérifier que f vérifie (E) sur I en se servant du fait que g vérifie (E') sur $\mathbb{R}$.

1.3. On résout (E') de façon classique. Une fois fait, en notant $\mathscr{S}'$ l'ensemble des solutions trouvé, on conclura, grâce la question précédente, que :

$$\mathscr{S} = \left\{t \in I \mapsto g(\ln t),\ g \in \mathscr{S}'\right\}$$

2. 2.1. Puisque $P(X) = X^4 - 4X^2$ est annulateur de M, on a $\mathrm{sp}(M) \subset \mathrm{Rac}(P) = \{-2, 0, 2\}$.

2.2. Par hypothèse, on sait déjà que -2 et 2 sont valeurs propres de M. Ainsi $\{-2, 2\} \subset \mathrm{sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$. Les valeurs propres étant racines de χ_M, -2 et 2 sont racines de χ_M. Ce dernier étant unitaire et de degré 3, il s'écrit nécessairement sous la forme :

$$\chi_M(X) = (X+2)(X-2)(X-\lambda)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que, λ étant une racine de χ_M, λ est valeur propre de M. Avec la remarque précédente, seuls trois cas se présentent, à savoir $\lambda = -2$, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$.

- $\lambda = -2$ ou $\lambda = 2$
  Dans ce cas, 0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible. Après simplification dans la relation de l'énoncé il vient $M^2 = 4I_3$. Ainsi $X^2 - 4$ est annulateur de M et comme il est scindé à racines simples, M est diagonalisable.
- $\lambda = 0$
  M a alors trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Planche A19 — CCINP 2022

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Montrer que Ψ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. Justifier que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3. Calculer $\Psi(0)$ et la limite de Ψ en $+\infty$.

1.4. Prouver qu'il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad \Psi'(x) = -A\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

1.5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = -2A^2$ et en déduire la valeur de A.

2. Soient E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que la matrice de l'endomorphisme f dans n'importe quelle base de E est $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. Montrer que $PA = AP$ pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

2.2. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B - \lambda I_n$ soit inversible et en déduire que $BA = AB$.

2.3. Montrer que f est une homothétie.

Solution

1. 1.1. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Les hypothèses simples se vérifient directement et pour l'hypothèse de domination on peut écrire :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

1.2. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre. Les hypothèses simples se vérifient directement et pour l'hypothèse de domination on peut écrire :

$$\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \left|-e^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant e^{-a(1+t^2)}$$

et on peut vérifier que cette fonction est positive, continue par morceaux et intégrable (critère de Riemann) sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \quad \Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1.3. On a directement $\Psi(0) = \pi/2$. Pour la limite en $+\infty$, on remarque que par positivité et croissance de l'intégrale, on a :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi e^{-x}}{2}$$

Par encadrement, on en déduit que Ψ tend vers 0 en $+\infty$.

1.4. Soit $x > 0$. On a :

$$\Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{x}t}{=} -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u}_{=\mathrm{A}} = -\mathrm{A}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

1.5. On commence par écrire, grâce à la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{A}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{u=\sqrt{x}}{=} -2\mathrm{A}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\mathrm{A}^2$$

Mais on a aussi, avec la question **1.3** :

$$\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = [\Psi(x)]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

En égalisant les deux expressions, il vient $\mathrm{A}^2 = \pi/4$ et donc $\mathrm{A} = \sqrt{\pi}/2$ puisque $\mathrm{A} \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

2. 2.1. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par changement de base, la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ représente l'endomorphisme f dans une autre base de E. D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{A}$, c'est-à-dire $\mathrm{AP} = \mathrm{PA}$.

2.2. On suppose que $\det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtiendrait ainsi que χ_{B} est nul alors qu'il est de degré n, ce qui est absurde. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{B}) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ce qui équivaut encore à $\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Par la question précédente, on a donc $(\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_n)$, ce qui après simplification donne $\mathrm{BA} = \mathrm{AB}$.

2.3. On vient de prouver que A commute avec toute matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On peut alors classiquement montrer que A est la matrice d'une homothétie (choisir $\mathrm{B} = \mathrm{E}_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$). Ainsi, puisque A représente f, f est bien elle-même une homothétie.

Planche A20 — CCINP 2021

1. Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

1.1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1.2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.

1.3. En déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et A^{T} commutent.

2.1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.

2.2. Prouver que Ker(A) et Im(A) sont supplémentaires orthogonaux dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Planche A21 — CCINP 2021

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\phi(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1) + \mathrm{P}(0)\mathrm{X}^n$.

1.1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1.2. Soit A la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Montrer que A^2 est triangulaire.

1.3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si $\lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{A})$, prouver que $\lambda^2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{A}^2)$.
Si $\lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{A}^2)$, montrer qu'au moins une racine carrée de λ appartient à sp(A).

1.4. En déduire les valeurs propres de ϕ.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

2.1. Montrer que a_n est bien défini pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Établir que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2.3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Planche A22 — CCINP 2021

1. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, on note $\varphi(\mathrm{P})$ le reste de la division euclidienne de $\mathrm{X}^2\mathrm{P}$ par $(\mathrm{X}^4 - 1)$.

1.1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

1.2. Prouver que φ est diagonalisable ; donner ses valeurs et espaces propres.

1.3. L'endomorphisme φ est-il inversible ? Si oui, donner son inverse.

2. On considère un musée recevant en moyenne 1000 visiteurs à la journée. Le nombre N de visiteurs quotidien sera modélisée par une loi de Poisson.

2.1. Donner le paramètre de la loi de Poisson suivie par N.

2.2. Il y a quatre tourniquets à l'entrée que les visiteurs choisissent de façon équiprobable. On note X le nombre de visiteurs passant par le premier tourniquet.
Donner $\mathrm{X}(\Omega)$.

2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la loi de X conditionnellement à $(\mathrm{N} = n)$.

2.4. Donner la loi de X.

Planche A23 — CCINP 2021

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$$

1.1. Donner les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles S est correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On se place désormais dans ce cas.

1.2. Déterminer le domaine de continuité de S.

1.3. Donner une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.4. Trouver un équivalent de S en 0^+.

2. On considère l'équation différentielles suivante : $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \quad (E)$. On notera G l'ensemble des solutions réelles de (E) et F l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Enfin, on pose, pour $y \in F$, $\Delta(y) = y'$.

2.1. Montrer que $G \subset F$ et que Δ est un endomorphisme de F.

2.2. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $G = \mathrm{Ker}(P(\Delta))$ et factoriser P.

2.3. Montrer que $G = \mathrm{Ker}(\Delta^2 - \mathrm{Id}_F) \oplus \mathrm{Ker}(\Delta + 2\,\mathrm{Id}_F)$.

2.4. Donner une base de G.

Planche A24 — CCINP 2021

1. Pour tout $n \geqslant 1$, tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t \qquad \text{et} \qquad I_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,1], \quad \left|g_n'(t)\right| \leqslant \frac{e^t}{n}$$

Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,1], \quad \left|g_n(t) - 1\right| \leqslant \frac{te^t}{n}$$

1.2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.

1.3. Sur le même intervalle, étudier la convergence uniforme.

2. Pour $n \geqslant 3$, on définit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Déterminer le rang de A et en déduire $\dim(\mathrm{Ker}(A))$.

2.2. Étudier la diagonalisabilité de A.

2.3. Déterminer la multiplicité de la valeur propre 0.

2.4. Montrer que les valeurs propres de A sont 0, λ et $1-\lambda$ avec $\lambda > 1$.

2.5. Déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de A.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

1.2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

1.3. La dérivée partielle seconde $\partial^2_{x,y} f$ est-elle définie ?

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} > 0$ pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]$ et $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

2.1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

2.2. Soient λ une valeur propre complexe de A et X la matrice colonne représentative, dans la base canonique, de $(x_1,\dots,x_n)$ un vecteur propre associé. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Montrer que :

$$|\lambda| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{j\neq k} a_{k,j}$$

2.3. En supposant que $|\lambda| = 1$, déterminer λ.

SOLUTION

1. 1.1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il reste à étudier la continuité en 0. En passant en polaires, on montre que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leqslant 2(x^2+y^2)^{1/2}$. Ainsi f tend vers 0 en 0 et f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il reste à étudier l'existence de dérivées partielles en 0. Pour $x \in \mathbb{R}*$, on a $(f(x,0) - f(0,0))/x = 1$ et donc tend vers 1 en 0. Ainsi f possède une dérivée partielle première suivant la première variable et $\partial_x f(0) = 1$.
De même f possède une dérivée partielle première suivant la seconde variable et $\partial_y f(0) = -1$.
On calcule ensuite les dérivées partielles premières en un point différent de $(0,0)$. On trouve :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

On a donc $\partial f_x(0,y) = 0$ qui ne tend pas vers 1 lorsque y tend vers 0, la dérivée partielle $\partial_x f$ n'est pas continue en $(0,0)$ et f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.3. On a après calculs :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y^4 - 3x^2y^2 - 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Ainsi, pour $x \neq 0$, $(\partial_y f(x,0) - \partial_y f(0,0))/x = 1/x$ et cette quantité diverge lorsque x tend vers 0. La dérivée partielle seconde $\partial^2_{x,y} f$ n'est donc pas définie en $(0,0)$.

2. 2.1. On remarque que $AU = U$ avec U la matrice colonne ne comportant que des 1 et donc 1 est valeur propre avec $(1,\dots,1)$ un vecteur propre associé.

2.2. On écrit la k−ème ligne de l'égalité $AX = \lambda X$. On obtient $\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = \lambda x_k$ et $(a_{k,k} - \lambda) x_k = -\sum_{j\neq k} a_{k,j} x_j$. L'inégalité triangulaire, la positivité des coefficients de A et la définition de k donne :

$$\left|(a_{k,k} - \lambda) x_k\right| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{k,j} x_j| \leqslant \sum_{j\neq k} a_{k,j} |x_j| \leqslant \sum_{j\neq k} a_{k,j} |x_k|$$

Comme $X \neq 0$, on a $|x_k| > 0$ et cela donne :

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{j\neq k} a_{k,j}$$

On a alors $\sum_{j\neq k} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}$ puis $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$. Par inégalité triangulaire il vient $|\lambda| \leqslant 1 - a_{k,k} + a_{k,k}$ et enfin $|\lambda| \leqslant 1$.

2.3. Si on a égalité, on a égalité dans la dernière inégalité triangulaire et comme $a_{k,k} \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda - a_{k,k} = \alpha a_{k,k}$ et donc $\lambda = (1+\alpha)a_{k,k} : \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il ne reste que la possibilité $\lambda = 1$.
Les valeurs propres de A sont donc 1 et des complexes de module strictement inférieur à 1.

Planche A26 — CCINP 2019

1. On définit la fonction f en posant $f(x) = \text{Arcsin}(x) \times \sqrt{1-x^2}$.

1.1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à préciser.

1.2. Trouver a, b, c trois fonctions polynomiales telles que f soit solution sur I de :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{E}$$

1.3. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) impaire développable en série entière, dont on précisera le développement en série entière.

1.4. Montrer que f est développable en série entière.

2. Pour $\text{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\text{N} = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\varphi(\text{M},\text{N}) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} m_{i,j}n_{i,j}$$

2.1. L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2.2. Soit $\text{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On définit $\text{H} = \{\text{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0\}$. Calculer :

$$d = \inf_{\text{M}\in\text{H}} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$

Solution

1. 1.1. Arcsin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et n'est pas dérivable en 1 et -1. De même pour $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

1.2. On trouve $a : x \mapsto 1-x^2$, $b : x \mapsto x$ et $c = a$.

1.3. Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ une somme de série entière de rayon $R > 0$, impaire. La fonction g est solution de (E) sur $\text{I} =]-1,1[\cap]-R,R[$ si et seulement si pour tout $x \in \text{I}$:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((2n+1)a_n - (2n-2)a_{n-1}x^{2n} = 1 - x^2$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve que g est solution de (E) sur $\text{I} =]-1,1[\cap]-R,R[$ si et seulement si pour tout $x \in \text{I}$:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad (2n+1)a_n - (2n-2)a_{n-1} = 0$$

ou encore, en le prouvant par récurrence sur n, si et seulement si :

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad a_n = -\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

On vérifie ensuite qu'une telle série entière a un rayon strictement positif. Précisément, on trouve $R = 1$, par exemple en fixant $\rho > 0$ et en étudiant la série numérique $\sum a_n \rho^{2n+1}$ avec la règle de d'Alembert. On a donc prouvé l'existence et l'unicité d'une solution de (E) sur $]-1,1[$ développable en série entière et impaire.

1.4. La fonction f est solution de (E) sur $]-1,1[$ et vérifie $f(0) = 0$ tout comme g. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'unicité (et l'existence) d'une solution à un tel problème de Cauchy donc $f = g$ et f est bien développable en série entière sur $]-1,1[$.

2. 2.1. L'application φ est bien un produit scalaire, les quatre axiomes de la définition d'un produit scalaire se vérifiant facilement.

2.2. d s'interprète comme le carré de la distance de A à H et donc c'est aussi le carré de la distance de A à son projeté orthogonal sur H, ou, par le théorème de Pythagore, le carré de la norme de son projeté orthogonal sur $H^\perp$. Or $H^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par J, matrice ne comportant que des 1 puisque H est exactement l'ensemble des matrices orthogonales à J. Ainsi :

$$d = \left\| \frac{\varphi(A,J)}{\varphi(J,J)} J \right\|^2 = \varphi(A,J)^2 = \left(\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} \right)^2.$$

Planche A27 — CCINP 2019

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \, dx$$

1.1. Trouver la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+2}$.

1.3. En déduire la somme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1.4. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

2. On introduit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}$ et $f \neq \mathrm{Id}$.

2.1. Montrer que 1 est valeur propre de f.

2.2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

2.3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est donnée par :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution

1. 1.1. On va utiliser le théorème de convergence dominée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (\tan(x))^n$. Les fonctions f_n sont bien continues sur $[0, \pi/4]$; la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, \pi/4]$ vers $f : x \mapsto 0$ si $x \neq \pi/4$ et 1 sinon ; f est bien continue par morceaux sur $[0, \pi/4]$. Enfin, on domine par la fonction constante en 1, qui est bien continue et intégrable sur $[0, \pi/4]$. Par le théorème de convergence dominée, I_n converge vers 0.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n (1 + (\tan x)^2) \, dx = \left[\frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

1.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n I_{2n} - (-1)^{n+1} I_{2n+2}$$

Par téléscopage sur la somme partielle de la série, la série étudiée converge et sa somme vaut $I_0 = \pi/4$.

1.4. La série $\sum(-1)^n I_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial à certaines séries alternées. On peut par ailleurs, calculer ses sommes partielles. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\tan x)^k \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - (-\tan x)^{n+1}}{1 + \tan x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \tan x} + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x)^{n+1}}{1 + \tan x} \, dx \end{aligned}$$

On peut dominer le deuxième terme par I_{n+1} et donc ce deuxième terme tend vers 0. Il reste donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x}$$

On calcule cette intégrale avec le changement de variable $u = \tan x$ et une décomposition en éléments simples :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+u)(1+u^2)}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+u}+\frac{1-u}{1+u^2}\right)du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u} - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$$

On trouve donc finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8}$$

2. 2.1. On observe que $P = X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de f et que $P = (X-1)(X^2+X+1)$. Si 1 n'est pas valeur propre de f, $f - \mathrm{Id}$ est inversible puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Donc X^2+X+1 est un polynôme annulateur de f et les valeurs propres réelles de f sont racines de X^2+X+1. Or ce polynôme n'a pas de racine réelle. Donc le spectre réel de f est vide. Or le polynôme caractéristique de f est un polynôme de degré 3, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il possède au moins une valeur propre. Donc 1 est bien valeur propre de f.

2.2. On procède alors à une analyse synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $x = y + z$ avec y dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et z dans $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$. On a alors $f(x) = y + f(z)$ et $f^2(x) = y + f^2(z)$ et donc $x + f(x) + f^2(x) = 3y$. On a donc $y = x/3 + f(x) + f^2(x)$ et $z = x - y$. Donc, si y et z existent, ils sont uniques : on a déjà prouvé que les deux noyaux sont en somme directe.
On pose ensuite $y = x/3 + f(x) + f^2(x)$ et $z = x - y$. On vérifie que $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$. Comme $x = y + z$, on a bien montré que les deux noyaux sont supplémentaires dans E.

2.3. On choisit u dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $u \neq 0$ et v dans $\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id})$, $v \neq 0$. On vérifie que $f(v) \in \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id})$ et que $f(v)$ n'est pas colinéaire à v. En effet, sinon, il existerait α réel tel que $f(v) = \alpha v$ et alors $f^2(v) = \alpha^2 v$ et, comme $f^2(v) + f(v) + v = 0$, on aurait $(\alpha^2 + \alpha + 1)v = 0$; mais $v \neq 0$ donc $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ ce qui contredit le fait que $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles. Donc, $(u, v, f(v))$ est une famille libre et donc une base $\mathbb{R}^3$, que l'on note $\mathscr{B}$. On pose alors $e_1 = u + v$, $e_3 = f(e_1)$ et $e_2 = f(e_3) = f^2(e_1)$. On a $e_3 = u + f(v)$ et $e_2 = u + f^2(v) = u - v - f(v)$. Si on note $\mathscr{C}$ cette famille (e_1, e_2, e_3), sa matrice représentative dans $\mathscr{B}$ est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or le déterminant de cette matrice est -3, donc $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice représentative de f dans cette base a bien la forme voulue, par construction.

PLANCHE A28 — CCINP 2019

1. Pour la suite, on pose $I = [0, 1]$.

1.1. Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n en posant :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I. On note S sa somme.

1.3. Expliciter la fonction S.

1.4. A-t-on convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$?

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

2.1. Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$.

2.2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2.3. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2.4. Montrer que si n est impair, A est non inversible.

2.5. Montrer qu'il n'existe pas de matrice symétrique réelle vérifiant $A^3 + 9A = 0$.

Solution

1. 1.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \mapsto (-1)^{n-1} x^n / n$. Chaque g_n est continue sur $[0,1]$. De plus, pour $x \in I$, la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ converge grâce au théorème spécial à certaines séries alternées et on a donc, en notant $R_n(x)$ le reste, $|R_n(x)| \leqslant x^{n+1}/(n+1) \leqslant 1/(n+1)$. Cela donne $\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$ et la suite des restes converge donc uniformément vers 0. Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur I et sa somme est donc continue sur $[0,1]$ par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. On sait que, pour $x \in [0,1[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \ln(1+x)$ par développement en série entière usuel. Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est aussi continue sur I, on peut étendre la relation précédente au point 1 et donc sur I.

1.2. Soit $x \in I$. Si $x < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}$ converge par domination par $2x^n$ qui est une série géométrique convergente. Si $x = 1$, le terme général s'écrit $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ équivalent à $\frac{1}{4n^2}$, qui est bien le terme général d'une série convergente (les séries sont bien à termes positifs).

1.3. Pour $x \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{1}{2}(-\ln(1-x)) \\ &= \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}\ln(1-x) \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x) \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, on a :

$$S(1) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2} \right) = \sum_{n=1}^{2N+2} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2)$$

1.4. Or $S(x) \to \ln(2)/2$ quand x tend vers 1^- de sorte que S n'est pas continue en 1. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne peut converger uniformément sur $[0,1]$ puisque, chaque f_n étant continue sur $[0,1]$, la somme serait continue sur $[0,1]$.

2. 2.1. $P = X^3 + 9X$ est un polynôme annulateur de A et les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont 0, $3i$ et $-3i$. D'où l'inclusion.

2.2. P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.3. La seule racine réelle de P est 0, donc le spectre réel de A est inclus dans $\{0\}$. Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A serait semblable à 0 et donc serait nulle, ce qui est exclu. Donc, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.4. Si n est impair, le polynôme caractéristique de A est de degré impair et donc diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ puisqu'il est unitaire. La fonction polynomiale associée étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle possède une racine : A possède au moins une valeur propre réelle, or on a vu que seule 0 est valeur propre possible, donc 0 est valeur propre de A et A n'est pas inversible.

2.5. Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par le théorème spectral d'où le résultat avec la question **2.3**.

Planche A29 — CCINP 2019

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$$

1.1. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1.2. La fonction somme est-elle continue sur son domaine de définition ?

1.3. Montrer que la fonction somme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. Déterminer la fonction somme sur son domaine de définition.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\mathrm{M}^3 - 4\mathrm{M} = 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0$.

2.1. Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}$.

2.2. Caractériser les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^3 - 4\mathrm{M} = 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0$.

Solution

1. 1.1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge par le théorème spécial des séries alternées.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, ce même théorème donne $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ de sorte que $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$. La suite des restes converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$ et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Toutes les fonctions u_n étant continues $\mathbb{R}_+$, U, la somme, est continue sur $\mathbb{R}_+$ par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

1.3. Toutes les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$, de sorte que sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\|u_n'\|_\infty \leqslant e^{-na}$. Comme $a > 0$ la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} e^{-na}$ converge et $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$. Par le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions, U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. Pour $x > 0$, on a, par somme d'une série géométrique de raison $-e^{-x}$:

$$\mathrm{U}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

On cherche donc une primitive de U′. On obtient l'existence de $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'identité $\mathrm{U}(x) = -\ln(1+e^{-x}) + \mathrm{K}$. L'étude du comportement en $+\infty$ donne $\mathrm{K} = 0$. En effet, U tend vers 0 en $+\infty$ par application du théorème de la double limite et $-\ln(1+e^{-x}) + \mathrm{K}$ tend vers K en $+\infty$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{U}(x) = -\ln(1+e^{-x})$.

2. 2.1. P annule M donc les valeurs propres de M sont incluses dans l'ensemble des racines de P.

2.2. Soit M une matrice vérifiant les relations. Le polynôme P est scindé à racines simples et annule M, donc M est diagonalisable. Les racines de P sont 0, -2 et 2. Notons m_0, m_{-2} et m_2 leurs multiplicités respectives, dans $\mathbb{N}$. On a alors, la trace étant un invariant de similitude, $0 = m_0 \times 0 + m_{-2} \times (-2) + m_2 \times 2 = 2(m_2 - m_{-2})$ et donc $m_{-2} = m_2$. Par ailleurs, on a aussi, $m_0 + m_{-2} + m_2 = 4$ ou encore, $m_0 + 2 \times m_2 = 4$. Il reste donc 3 possibilités : $m_0 = 0$ et $m_2 = 2$, ou $m_0 = 2$ et $m_2 = 1$, ou $m_0 = 4$ et $m_2 = 0$. Dans les deux premiers cas, M est respectivement semblable aux matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le dernier, M est semblable à 0, donc égale à 0.
Réciproquement, on vérifie que ces trois types de matrices satisfont bien les conditions de départ.

Planche A30 — CCINP 2019

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Calculer I_n en distinguant les cas n pair et n impair.
On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

1.2. Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose :

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1.3. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

On pose également, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où cela a un sens :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant n!$.
2.2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
2.3. Résoudre cette équation différentielle.
2.4. Déterminer a_{2p} et a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

Solution

1. 1.1. Dans le cas impair, la fonction intégrée étant intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire, l'intégrale est nulle donc $I_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas pair, on écrit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2} e^{-t^2} \, dt = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1}(-2t) e^{-t^2} \, dt$$

On procède alors par intégration par parties généralisée et on trouve $I_{2n+2} = (2n+1)/2 \times I_{2n}$.
On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avec $I_0 = 1$ donnée par l'énoncé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

1.2. La symétrie est immédiate, la bilinéarité en découle alors avec la linéarité de l'intégrale. Le caractère positif découle de la positivité de l'intégrale. Si P est un polynôme tel que $\varphi(P, P) = 0$, alors l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto P(t)^2 \exp(-t^2)$, qui est continue et positive sur $\mathbb{R}$, est nulle. On obtient $P(t)^2 \exp(-t^2) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et enfin $P = 0$.

1.3. L'orthogonal de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ étant une droite, si on note U un vecteur normé de cette droite, la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ est la norme de la projection orthogonale de X^3 sur cette droite, i.e. la norme de $\varphi(X^3, U)U$. On cherche U en écrivant $U = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et en traduisant $\varphi(U, 1) = 0$, $\varphi(U, X) = 0$, $\varphi(U, X^2) = 0$ et U normé. Les trois produits scalaires donnent trois équations, on en déduit $b = d = 0$ et $c = -3a/2$. On écrit alors $\|U\| = 1$, ce qui donne $|a| = 2/\sqrt{3}$. On choisit $U = (2X^3 - 3X)/\sqrt{3}$. On a donc $X^3 = 3X/2 + \sqrt{3}U/2$, le premier terme étant dans $\mathbb{R}_2[X]$ et le deuxième dans son orthogonal. La distance cherchée est la norme de $2U/\sqrt{3}$ i.e. $\sqrt{3}/2$. C'est la distance cherchée.

2. 2.1. On montre par récurrence sur $n \geqslant 2$ que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $a_k \leqslant k!$.

2.2. Par la question précédente, par comparaison, f a un rayon de convergence au moins égal à 1. Grâce à la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par manipulation des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$, on trouve $f'(x) = (1+x)f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

2.3. Par résolution de l'équation différentielle, avec la condition $f(0) = 1$, on trouve que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = e^x e^{\frac{x^2}{2}}$$

2.4. Pour $x \in]-1, 1[$, on a les développements :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec $b_{2p+1} = 0$ et $b_{2p} = 1/(p! 2^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On effectue alors un produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k)!}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, en enlevant les termes impairs, on trouve :

$$c_{2p} = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{1}{(2(p-\ell))! \ell! 2^\ell} \qquad \text{et} \qquad c_{2p+1} = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{1}{(2p-2\ell+1)! \ell! 2^\ell}$$

Par unicité du développement en série entière sur $]-1, 1[$, on obtient, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{2p} = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(2p)!}{(2(p-\ell))! \ell! 2^\ell} \qquad \text{et} \qquad a_{2p+1} = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{(2p-2\ell+1)! \ell! 2^\ell}$$

Planche A31 — CCINP 2019

1. On définit la fonction f en posant $f(x) = \text{Arcsin}(x) \times \sqrt{1-x^2}$.

1.1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à préciser.

1.2. Trouver a, b, c trois fonctions polynomiales telles que f soit solution sur I de :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{E}$$

1.3. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) impaire développable en série entière, dont on précisera le développement en série entière.

1.4. Montrer que f est développable en série entière.

2. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans E, on pose :

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit alors $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{g \in \mathrm{E}, \forall x \in [-1,0], g(x) = 0\}$.

2.1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2.2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E en somme directe orthogonale.

2.3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

2.4. Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$.

2.5. Soit $g \in \mathrm{F}^\perp$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$f_n \text{ nulle sur } [0,1], \quad f_n = g \text{ sur } [-1,-1/n] \quad \text{et} \quad f_n \text{ affine sur } [-1/n,0]$$

Expliciter $\varphi(f_n, g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\int_{-1}^{0} g^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que $\mathrm{F}^\perp = \mathrm{G}$.

Solution

1. Voir le corrigé de la planche **A2**.

2. **2.1.** La symétrie est immédiate. La bilinéarité découle de la symétrie et de la linéarité de l'intégrale. La positivité découle de la positivité de l'intégrale. Si f est continue sur $[-1,1]$ et vérifie $\varphi(f,f) = 0$, alors f^2 étant positive, continue et d'intégrale nulle, f^2 est identiquement nulle sur $[-1,1]$ et donc f est identiquement nulle sur $[-1,1]$.

2.2. On vérifie facilement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont orthogonaux. Soient f dans F et g dans G. Alors $\varphi(f,g) = 0$ car f est nulle sur $[0,1]$ et g est nulle sur $[-1,0]$. Enfin, si h est à la fois dans F et dans G alors $\varphi(h,h) = 0$ par ce qui précède de sorte que $h = 0$ par caractère défini positif. Ainsi la somme est bien directe et orthogonale.

2.3. Les sous-espaces F et G ne sont pas supplémentaires. La fonction h constante égale à 1 est dans E et si $h = f + g$ avec f dans F et g dans G, alors $h(0) = f(0) + g(0)$ et donc $1 = 0$, ce qui est absurde.

2.4. Comme F et G sont orthogonaux, il en découle que $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$.

2.5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\varphi(f_n, g) = \int_{-1}^{-1/n} g^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1/n}^{0} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} g^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1/n}^{0} (f_n(t) - g(t))g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or f_n est bornée sur $[-1,1]$ et $\|f_n\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ de sorte que la deuxième intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisqu'elle est dominée par $2\|g\|_\infty^2/n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(f_n, g) = 0$ car $f_n \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{F}^\perp$. Il vient donc $\int_{-1}^{0} g^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Puisque g^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1,0]$, elle est identiquement nulle sur $[-1,0]$ et g aussi. Ainsi $g \in \mathrm{G}$. On a montré que $\mathrm{F}^\perp \subset \mathrm{G}$ et comme on avait déjà montré l'autre inclusion, il vient $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$.

Planche A32 — CCINP 2019

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On se donne X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on pose $\mathrm{U} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{V} = \max(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

1.1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

1.3. Soit Z une variable aléatoire telle que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et la probabilité conditionnelle de Z sachant $(X = k)$ suit une loi binomiale de paramètres k et p. Donner la loi de Z.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose :

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2.2. Montrer que 0 n'est pas dans le spectre de φ.

2.3. Montrer que 1 est valeur propre de φ et trouver son sous-espace propre.

2.4. Trouver toutes les valeurs propres de φ.

Solution

1. J'ai traité l'exercice avec X et Y suivant des lois géométriques...Je laisse ces calculs.

1.1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

1.2. U et V ne sont pas indépendantes car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(U = k) \neq 0$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $P(V = l) \neq 0$, or pour $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k > l$, $P((U = k) \cap (V = l)) = 0$ et donc $P((U = k) \cap (V = l)) \neq P(U = k)P(V = l)$.

1.3. Par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $((X = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a pour $l \in \mathbb{N}$,

$$P(Z = l) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = l \mid X = k)P(X = k) = \sum_{k=l}^{+\infty} \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l}(1-p)^{k-1}p.$$

On a, après factorisation par les quantités ne dépendant pas de k et changement d'indice,

$$P(Z = l) = \frac{p^{l+1}(1-p)^{l-1}}{l!} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+l)\cdots(k+1)\left((1-p)^2\right)^k.$$

On reconnaît la dérivée l-ième de f en $(1-p)^2$, avec $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. D'où

$$P(Z = l) = \frac{p^{l+1}(1-p)^{l-1}}{l!} \frac{l!}{(1-(1-p)^2)^{l+1}} = \frac{(1-p)^{l-1}}{(2-p)^{l+1}}.$$

2. Puis je refais l'exercice en suivant bien l'énoncé...

2.1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $E(X) = V(X) = \lambda$.

2.2. U et V ne sont pas indépendantes car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(U = k) \neq 0$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $P(V = l) \neq 0$, or pour $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k > l$, $P((U = k) \cap (V = l)) = 0$ et donc $P((U = k) \cap (V = l)) \neq P(U = k)P(V = l)$.

2.3. Par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $((X = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a pour $l \in \mathbb{N}$,

$$P(Z = l) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = l \mid X = k)P(X = k) = \sum_{k=l}^{+\infty} \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On a, après factorisation par les quantités ne dépendant pas de k,

$$P(Z = l) = \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{k-l}}{(k-l)!} = \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda}.$$

Finalement,

$$P(Z = l) = \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-p\lambda}$$

et Z suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$, résultat déjà vu dans des situations similaires.

3. 3.1. φ est linéaire par linéarité de l'intégrale et de l'évaluation en un point.
Soit $f \in E$. Montrons que $\varphi(f) \in E$, i.e. que $\varphi(f)$ est continue sur $[0,1]$. Le théorème fondamental assure que $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ car f est continue, donc $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continue sur $[0,1]$ et par produit $\varphi(f)$ est continue sur $]0,1]$. Il reste à voir la continuité de $\varphi(f)$ en 0.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par continuité de f, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y \in [0,\eta]$, $|f(y) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in]0,\eta]$.

$$\varphi(f)(x) - \varphi(f)(0) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - f(0) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t) - f(0)\big)dt.$$

Et donc

$$|\varphi(f)(x) - \varphi(f)(0)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \big|f(t) - f(0)\big|dt.$$

Comme $x \in]0,\eta]$, pour tout $t \in [0,x]$, $t \in [0,\eta]$ et donc $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. Il vient

$$|\varphi(f)(x) - \varphi(f)(0)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \varepsilon dt \leqslant \varepsilon.$$

On a bien montré que $\varphi(f)$ est continue en 0 et donc elle est continue sur $[0,1]$.

3.2. Supposons que 0 soit dans le spectre de φ. Il existe f dans E, non nulle, telle que $\varphi(f) = 0$. On a alors $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0$ ou encore $\int_0^x f(t)dt = 0$. On peut dériver (théorème fondamental) sur $]0,1]$ et on a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$. Comme f est continue en 0, on a aussi $f(0) = 0$ et finalement, $f = 0$: contradiction. Donc 0 n'est pas valeur propre de φ.

3.3. Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f) = f$. On a vu en a. que $\varphi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, $\int_0^x f(t)dt = xf(x)$, en dérivant, on obtient que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = f(x) + xf'(x)$, donc $f'(x) = 0$: f est constante sur $]0,1]$. Par continuité, f est constante sur $[0,1]$.
On vérifie facilement, que si f est constante, f est satisfait $\varphi(f) = f$.
1 est bien valeur propre de φ et $E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(1)$.

3.4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $f \in E$ non nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On a, pour $x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$ et, comme précédemment, on peut dériver (car λ non nul) et on obtient, pour tout $x \in]0,1]$, $f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{x}f(x)$. Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \mu e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)}$.
f possède une limite en 0^+, donc on doit avoir $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$, i.e. $\lambda \in]0,1]$.
On a montré que le spectre de f est inclus dans $]0,1]$.
Réciproquement, si $\lambda \in]0,1]$, on vérifie que $f_\lambda : x \mapsto e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)}$ vérifie $\varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ et donc λ est bien dans le spectre de φ.

Planche A33 — CCINP 2017

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse à l'équation $x - e^{-x} = n$.

   1.1. Montrer qu'il existe une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

   1.2. Montrer que $x_n \in [n, n+1]$.

   1.3. Donner un équivalent de $x_n - n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On se donne u un endomorphisme de rang 1.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(u) \neq 0$.

Solution

1. 1.1. $f_n : x \mapsto x - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto 1 + e^{-x}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ et sa limite en $-\infty$ est $-\infty$, comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. n possède donc un unique antécédent sur $\mathbb{R}$: l'équation donnée possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

1.2. $f_n(n) = n - e^{-n} < n$, par croissance de f_n, $n \leqslant x_n$.
$f_n(n+1) = n + 1 - e^{-(n+1)} > n$ et par croissance de f_n, $n + 1 \geqslant x_n$.
On a bien, $x_n \in [n, n+1]$.

1.3. $x_n \geqslant n$ donne x_n diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Or $x_n = n + e^{-x_n}$. Comme e^{-x_n} tend vers 0, on peut écrire $x_n = n + o(1)$. On a alors, $x_n - n = e^{-(n+o(1))} = e^{-n}e^{o(1)}$ Or $e^{o(1)}$ converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, donc $x_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

2. On choisit une base adaptée à u : i.e. les $n-1$ premiers vecteurs sont dans le noyau de u. (Le théorème du rang donne que ce noyau est de dimension $n-1$). La matrice représentative de u dans cette base $\mathscr{B}$ est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

On a alors $\operatorname{tr}(u) = \alpha_n$.
Si $\alpha_n \neq 0$, i.e. $\operatorname{tr}(u) \neq 0$, alors $\chi_u = X^{n-1}(X - \alpha_n)$. le spectre de u est donc formé de 0 et de α_n et le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$ et celui associé à α_n est de dimension 1 : la somme des dimensions est n, u est diagonalisable.
Si $\alpha_n = 0$, i.e.$\operatorname{tr}(u) = 0$, alors $\chi_u = X^n$, 0 est la seule valeur propre de u et son sous-espace propre est de dimension $n-1 < n$, donc u n'est pas diagonalisable.

Planche A34 — CCINP 2017

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$$

1.1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2. Étudier la suite de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1.3. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
On note S la somme de la série sur le domaine de convergence simple.

1.4. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \in]0,1]$.

1.5. Étudier la continuité de S.

1.6. Trouver la limite de S en $+\infty$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

À quelle(s) condition(s) A est-elle diagonalisable ?

Solution

1. 1.1. On a $f_n(0) = 0 \to 0$.
Si $x \in]0,1[$, $f_n(x) \sim \frac{x^n}{n^2} \to 0$.
$f_n(1) = \frac{1}{2n^2} \to 0$.
Si $x > 1$, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x^n} \to 0$.
La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.

1.2. On pourrait appliquer le théorème de convergence dominée mais il est aussi simple de majorer grossièrement. On a

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n^2}\,dx = \frac{1}{n^2(n+1)} \to 0$$

La suite proposée est donc convergente de limite nulle.

1.3. On a $f_n(0) = 0$ qui est le terme général d'une série absolument convergente.
Si $x \in]0,1[$, $f_n(x) \sim \frac{x^n}{n^2} = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente.
$f_n(1) = \frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente.
Si $x > 1$, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x^n} = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente.
S est ainsi définie sur $\mathbb{R}^+$.

1.4. Soit $x \in]0,1]$. On a

$$f_n(1/x) = \frac{1/x^n}{n^2(1+1/x^{2n})} = \frac{x^n}{n^2(x^{2n}+1)} = f_n(x)$$

On en déduit que

$$\forall x \in]0,1],\ \mathrm{S}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{S}(x)$$

1.5. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$. De plus, comme $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ est plus petit que x^n et donc que 1 pour $x \in [0,1[$ et plus petit que $\frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n}$ et donc que 1 pour $x \geqslant 1$, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, $\sum(f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Par théorème de continuité, on a donc

$$\mathrm{S}_n \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

1.6. On peut conclure de deux façons.
La convergence normale au voisinage de $+\infty$ permet d'utiliser le théorème de double limite. Comme chaque f_n est de limite nulle en $+\infty$, il en est de même pour S.
Comme $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(1/x)$, la continuité de S en 0 donne $\mathrm{S}(x) \to \mathrm{S}(0) = 0$ quand $x \to +\infty$.

2. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, une matrice de taille 3 ayant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable (avec des sous-espaces propres de dimension 1). Par ailleurs, les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale. On distingue donc trois cas.

- Si $a \notin \{1,2\}$, A est diagonalisable (trois valeurs propres distinctes).
- Si $a = 1$ alors 1 est valeur propre de multiplicité 2 et 2 est valeur propre de multiplicité 1. A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)$ est de dimension 2, c'est à dire $\mathrm{A}-\mathrm{I}_3$ de rang 1. Or,

$$\mathrm{A}-\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  A est donc diagonalisable ssi $b = 0$.
- Si $a = 2$ alors 1 est valeur propre de multiplicité 1 et 2 est valeur propre de multiplicité 2. A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)$ est de dimension 2, c'est à dire $\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3$ de rang 1. Or,

$$\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  A est donc diagonalisable ssi les deux dernières colonnes sont liées i.e. ssi $bd + c = 0$.

Ainsi A est diagonalisable ssi $a \notin \{1,2\}$ ou $(a = 1, b = 0)$ ou $(a = 2, bd + c = 0)$.

Planche A35 — CCINP 2017

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Déterminer le domaine de définition de f.

1.2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

1.3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x-1$ soit dans le domaine de f. Calculer $f(x-1) - f(x)$.

1.4. En déduire que f s'écrit comme la somme d'une série de fonctions.

1.5. Donner une autre méthode pour retrouver le résultat de la question précédente.

2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathrm{A}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille d'événements. Montrer :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) \leqslant \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) + (n-1).$$

Solution

1. 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est équivalente à $t \mapsto 1$ en 0 et donc g est intégrable sur $]0,1]$. Elle est équivalente en $+\infty$ à $t \mapsto te^{-t(x+1)}$. Si $x > -1$, $t^2 g(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées et donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Si $x \leqslant -1$, alors g diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et $1 = o(g)$ et par comparaison à $t \mapsto 1$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$, g ne l'est pas non plus.
g est donc définie sur $]-1, +\infty[$.

1.2. Soit (x_n) une suite divergeant vers $+\infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : t \mapsto \frac{te^{-tx_n}}{e^t-1}$. g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(g_n) converge simplement vers 0 qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
x_n est plus grand que 1 à partir d'un certain rang n_0. Par ailleurs, pour $t > 0$, $e^t > 1 + t$ et donc $\frac{t}{e^t-1} < 1$.
On a alors pour $n \geqslant n_0$ et $t > 0$,

$$0 \leqslant \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \leqslant e^{-t}.$$

Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée : $f(x_n)$ converge vers 0. Par caractérisation séquentielle de la limite, $f(x)$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1.3. Pour $x > 0$, par linéarité de l'intégrale

$$f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} te^{-tx} dt.$$

Par intégration par parties. $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et leur produit est de limites nulles en 0 et en $+\infty$. Les deux intégrales suivantes sont alors de même nature et comme la première converge, les deux convergent et elles sont opposées :

$$\int_0^{+\infty} te^{-tx} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{-x} dt.$$

On a donc $f(x-1) - f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1.4. On a alors pour $x > -1$, $f(x) - f(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) - f(x+n+1) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$. Puisque $f(x+n)$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, par transformation suite série, $\sum f(x+n) - f(x+n+1)$ converge et sa somme est $f(x)$: on a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

1.5. Pour $t > 0$, on peut écrire $\frac{1}{e^t-1} = e^{-t} \frac{1}{1-e^{-t}} = e^{-t} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$. On a alors pour $x > -1$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-(x+n)t} dt.$$

On intervertit alors la somme et l'intégrale. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n : t \mapsto te^{-(x+n)t}$.
Chaque h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable (prolongeable par continuité en 0 et par comparaison à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).
$\sum h_n$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t-1}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} te^{-(n+x)t} dt = \frac{1}{(n+x)^2}$ par intégration par parties et donc $\sum u_n$ converge. On peut donc intervertir la somme et l'intégrale et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

2. Montrons le résultat pour deux événements A et B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

et donc on a bien, puisque $0 \leqslant P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

et comme $P(A \cup B) \leqslant 1$,

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant 1$$

i.e.

$$P(A) + P(B) \leqslant P(A \cap B) + 1.$$

On montre alors le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
L'initialisation est évidente.
Soit n un entier tel que le résultat soit vrai. Soient $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ une famille d'événements. On pose $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et $B = A_{n+1}$. Alors le cas de deux parties étudié au début donne

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leqslant P(A) + P(B)$$

et par hypothèse de récurrence $P(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$. On a donc bien

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + n - 1 + P(A_{n+1}).$$

On pose maintenant $A' = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et $B' = An + 1$. L'étude pour deux parties faite au début donne $P(A') + P(B') \leqslant P(A' \cap B') + 1$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) + n - 1 + 1.$$

On a bien ce qu'on veut.

Planche A36 — CCINP 2017

1. On note $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}(t))^n \, dt$$

1.1. Résoudre $\mathrm{sh}(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1.2. Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

1.3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$$

Prouver alors que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$$

Trouver un encadrement de I_n puis un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^{T}M = I_n$.

2.1. Montrer que M est symétrique.

2.2. Déterminer toutes les matrices M vérifiant $MM^TM = I_n$.

Solution

1. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \text{ et } \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1.1. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (de dérivée $\mathrm{ch}(x) > 0$) et continue. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et l'équation proposée a une unique solution x. En posant $y = e^x$, on a $y - \frac{1}{y} = 2$ et donc $y^2 - 2y + 1 = 0$. y est donc l'unique solution > 0 de cette équation : $y = 1 + \sqrt{2}$. Finalement, la solution cherchée est $x = \alpha$.

1.2. Par stricte croissance de sh, on a $\forall t \in [0, \alpha[,\ \mathrm{sh}(t) \in [0, \mathrm{sh}(\alpha)[= [0, 1[$. On en déduit qu'en posant $f_n : t \mapsto \mathrm{sh}(t)^n$, on a une suite de fonctions qui converge simplement sur $[0, \alpha[$ vers la fonction nulle. Les f_n ainsi que la limite simple sont continues que $[0, \alpha[$. Enfin, on a $|f_n| \leqslant 1$ sur $[0, \alpha[$ ce qui nous donne une fonction dominatrice intégrable (continue sur le segment). Le théorème de convergence dominée s'applique et indique que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$$

1.3. On utilise les formules rappelées au début :

$$\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)^2 = \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = 1$$

On effectue une intégration par parties dans I_n (en primitivant sh et en dérivant sh^{n-1}). Les fonctions mises en jeu étant toute de classe C^∞ sur le segment, il n'y a aucun problème. On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\mathrm{sh}(t)^{n-1}\mathrm{ch}(t)\right]_0^\alpha - (n-1)\int_0^\alpha \mathrm{sh}(t)^{n-2}\mathrm{ch}(t)^2\, dt \\ &= \mathrm{ch}(\alpha) - (n-1)(I_{n-1} + I_n) \end{aligned}$$

Comme ch est à valeurs positives, $\mathrm{ch}(\alpha) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}(\alpha)^2} = \sqrt{2}$. On a ainsi montré que

$$\forall n \geqslant 2,\ nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$$

Comme $\mathrm{sh}(t)$ pour $t \in [0, \alpha]$, on a (I_n) qui décroît. On en déduit que

$$(2n-1)I_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant (2n-1)I_{n-2}$$

et donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$$

Majorant et minorant étant équivalents à $\frac{1}{n\sqrt{2}}$, on a

$$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

2. En passant au déterminant, on obtient que $\det(M)^3 = 1$ et M est donc inversible. On a alors

$$M^{-1} = MM^T$$

ce qui montre que M^{-1} est symétrique. M l'est alors aussi et on a $M^3 = I_n$. $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$ annule M et les valeurs propres de M sont donc racines de $X^3 - 1$. On en déduit que 1 est la seule valeur propre réelle de M.
Or, M est $\mathbb{R}$-diagonalisable (puisque symétrique réelle) et on a donc $M = I_n$ (seule matrice diagonalisable dont 1 est la seule valeur propre). Réciproquement, I_n vérifie bien les conditions imposées. I_n est donc la seule matrice convenable.

Planche A37 — CCINP 2017

1. On étudie l'intégrale I suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t(\ln(t))^2}{2(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Montrer que I converge.

1.2. Donner le DSE de $x \mapsto 1/(1-x)^2$. En déduire que :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

2. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme P annulant f tel que $\mathrm{P}(0) = 0$ et $\mathrm{P}'(0) \neq 0$.
Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ quand E est de dimension finie puis dans le cas général.

Solution

1. 1.1. $f\ :\ t \mapsto \frac{t(\ln(t))^2}{2(1-t)^2}$ est continue sur $]0,1[$ et on a des problèmes aux voisinages de 0 et de 1.
Au voisinage de 0, $f(t) \sim t(\ln(t))^2/2 \to 0$ et f est prolongeable par continuité.
Au voisinage de 1, $f(t) \sim \frac{(t-1)^2}{2(1-t)^2} \to 1/2$ et f est prolongeable par continuité.
f est ainsi intégrable sur $]0,1[$ et I existe.

1.2. On connaît le DSE de $\frac{1}{1-x}$ et on sait que l'on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\forall x \in]-1,1[\ \ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

On en déduit que

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt \ \text{ avec } \ f_n(t) = \frac{n}{2}\ln^2(t)\,t^n$$

Par définition, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme simple est continue. Pour pouvoir intervertir somme et intégrable, il suffit de montrer que f_n est intégrable et que $\int_0^1 |f_n|$ est le terme général d'une série convergente. L'intégrabilité est acquise car f est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0). Une intégration par parties donne (on vérifie pendant qu'on la fait qu'elle est licite en montrant que les quantités écrites existent)

$$\int_0^1 |f_n| = \left[\frac{n}{2(n+1)}\ln^2(t)\,t^{n+1}\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n \ln(t)\,dt$$

Le crochet est nul. On refait alors une IPP (idem)

$$\int_0^1 |f_n| = -\frac{n}{(n+1)^2}\left[t^{n+}\ln(t)\right]_0^1 + \frac{n}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n\,dt = \frac{n}{(n+1)^3} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3}$$

On obtient bien le terme général d'une série convergente et ainsi

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3}\right)$$

En ajoutant le terme d'indice 0 (qui est nul) et par changement d'indice, on obtient le résultat demandé.

2. Par hypothèse, il existe des scalaires $a_1,\dots,a_n$ tels que $\mathrm{P} = a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n$ avec $a_1 \neq 0$. Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$; il existe un vecteur x tel que $y = f(x)$ et on a $f(y) = 0$. Traduisons $\mathrm{P}(f)(x) = 0$:

$$f(x) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1}f^k(x) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1}f^{k-1}(y) = 0$$

on en déduit que $y = f(x) = 0$ et que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. Si E est de dimension finie, l'exercice est terminé (par dimension et avec le théorème du rang). Dans le cas général, on décompose un élément $x \in \mathrm{E}$ sous la forme

$$x = \frac{1}{a_1}\sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}(x) - \frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{n} a_k f^{k-1}(x) = y + f\left(\underbrace{-\frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{n} a_k f^{k-2}(x)}_{=z}\right)$$

ce qui montre que $x \in \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$ (z existe bien : la somme débute à $k=2$; $f(y)=0$ découle de $\mathrm{P}(f)(x)=0$).

Planche A38 — CCINP 2017

1. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \ln(2n+(-1)^n)-\ln(2n)$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

   2.1. On note $\varphi : \mathrm{P}\mapsto(\mathrm{P}(\lambda_1),\ldots,\mathrm{P}(\lambda_n))$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}^n$.

   2.2. Soit $g\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $g\circ f = f\circ g$. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   En déduire une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

   2.3. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $g=\mathrm{P}(f)$.

   2.4. Montrer que $\mathscr{C}(f)=\{g\in\mathscr{L}(\mathrm{E}),\ g\circ f = f\circ g\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   Déterminer sa dimension.

Solution

1. Tout d'abord, u_n est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, car pour $n=0$, $2n+(-1)^n=1>0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $2n+(-1)^n\geqslant 2n-1>0$. On a pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$. Par développement limité
$$u_n=\frac{(-1)^n}{2n}+v_n$$
avec $v_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $\sum v_n$ converge absolument par comparaison.
Or $\sum\frac{(-1)^n}{2n}$ converge par le théorème spécial à certaines séries alternées.
$\sum u_n$ converge donc par linéarité.
2. **2.1.** φ est clairement linéaire et les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont identiques (égales à n). Il suffit donc de montrer que φ est injectif. On cherche donc son noyau. Soit P dans le noyau de φ. On a alors $\mathrm{P}(\lambda_i)=0$ pour $i=1,\ldots,n$: P possède n racines deux à deux distinctes et P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, P est nul. φ est bien injectif et donc bijectif.

   2.2. f possède n valeurs propres deux à deux distinctes : f est diagonalisable et les sous-espaces propres de f sont de dimension 1. Par ailleurs, g commutant avec f, ces sous-espaces propres sont stables par g.
   Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E constituée de vecteurs propres de f ($f(e_i)=\lambda_i e_i$ pour $i=1,\ldots,n$). Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)=\mathrm{Vect}(e_i)$ est stable par g, donc il existe $\mu_i\in\mathbb{R}$ tel que $g(e_i)=\mu_i e_i$: $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, aussi constituée de vecteurs propres de g.

   2.3. Les matrices représentatives dans $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, de f et g sont $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ et $\Delta=\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ respectivement. Pour $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $g=\mathrm{P}(f)$ si et seulement si $\Delta=\mathrm{P}(\mathrm{D})$, i.e. si et seulement si $\mu_i=\mathrm{P}(\lambda_i)$ pour $i=1,\ldots,n$, ou encore $(\mu_1,\ldots,\mu_n)=\varphi(\mathrm{P})$. On a donc existence et unicité de P par la bijectivité de φ.

   2.4. $\mathscr{C}(f)$ est bien une partie de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, non vide ($f\in\mathscr{C}(f)$) et stable par combinaison linéaire : $\mathscr{C}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   La question précédente établi un isomorphisme entre $\mathscr{C}(f)$ et $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et donc $\mathscr{C}(f)$ est de dimension n.

Planche A39 — CCINP 2017

1. Soit $n\geqslant 2$ un entier. On introduit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{A}\neq 0$ et on pose $\mathrm{B}=\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

   1.1. Montrer que B est diagonalisable.

   1.2. Déterminer le rang de B.

   1.3. Trouver les éléments propres de B.

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_0=1$ et $b_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{cases} a_{n+1} &= -a_n-2b_n\\ b_{n+1} &= 3a_n+4b_n\end{cases}$$

2.1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, les quantités $a_{n+1} + b_{n+1}$ et $3a_{n+1} + 2b_{n+1}$ puis expliciter a_n et b_n.

2.2. Trouver les rayons de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} x^n$, puis déterminer leurs sommes.

Solution

1. 1.1. $B^2 = \alpha B$ avec $\alpha = A^T A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, où on a noté (a_i) les éléments de A. Comme A est non nulle, $\alpha \neq 0$ et donc le polynôme $P = X(X - \alpha)$ annule B et c'est un polynôme scindé à racines simples : B est diagonalisable.

1.2. $\mathrm{rg}(B) = 1$ car toutes les colonnes de B sont proportionnelles à A et elles ne sont pas toutes nulles ($A^T \neq 0$).

1.3. Comme $P = X(X - \alpha)$ annule B, les seules valeurs propres possibles de B sont 0 et α.
Avec la question précédente et le théorème du rang, 0 est valeur propre de B et la dimension de son sous-espace propre est $n - 1$.
Comme B est diagonalisable, α est valeur propre de B et le sous-espace propre de B associé à α est une droite vectorielle.
On remarque que $BA = \alpha A$, donc $E_\alpha(B) = \mathrm{Vect}(A)$.
Pour le sous -espace propre associé à la valeur propre 0, i.e. le noyau de B, $X = (x_1 \cdots x_,)^T$ est dans le noyau de B si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. On en a donc une équation cartésienne. Il s'agit bien d'un hyperplan car les a_i ne sont pas tous nuls.

2. 2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n)$ et $3a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3a_n + 2b_n$. La suite $(a_n + b_n)$ est une suite géométrique de raison 2 et la suite $(3a_n + 2b_n)$ est constante. On déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_n + b_n &= 2^n \\ 3a_n + 2b_n &= 3 \end{cases}$$

On soustrait deux fois la première ligne à la deuxième, il vient $a_n = 3 - 2^{n+1}$. On déduit donc ensuite que $b_n = 3(2^n - 1)$.

2.2. $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{n+1}$. le rayon de convergence cherché est donc aussi celui de $\sum \frac{2^n}{n!} x^n$. On reconnaît une série exponentielle : son rayon de convergence est donc $+\infty$ (on peut le retrouver par la règle de d'Alembert appliquée à la série de terme général $\sum \frac{(2x)^n}{n!}$ pour $x \neq 0$).
De même $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 32^n$ et comme précédemment, le rayon de convergence cherché est $+\infty$.
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 - 2^{n+1}}{n!} x^n = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 3e^x - 2e^{2x}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3(2^n - 1)}{n!} x^n = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 3e^{2x} - 3e^x.$$

Planche A40 — CCINP 2017

1. On définit une fonction F en posant, là où cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.1. Donner le domaine de définition de F.

1.2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3. Déterminer une expression de F sur son domaine de définition.

2. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\varphi(M) = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$.

2.1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.2. Montrer que toute valeur propre de φ est de carré égal à 1.

2.3. Conclure sur le caractère diagonalisable de φ. Donner les éléments propres.

Solution

1. 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_x : t \mapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur x.
Si $x < 0$ alors g_x est de limite $-\infty$ en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable.
Si $x > 0$ alors $g_x(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ ce qui donne l'intégrabilité.
Si $x = 0$ alors g_x est nulle et donc intégrable.
Finalement, F est définie sur $\mathbb{R}^+$.

1.2. On veut utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ t \mapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto e^{-xt^2}$.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0,\ |e^{-tx^2}| \leqslant e^{-ta^2}$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continu et dominé par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées puisque $a > 0$).

Le théorème donne $F \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ et

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt$$

1.3. Le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ donne

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Il existe donc $c > 0$ tel que

$$\forall x > 0,\ F(x) = c + \sqrt{\pi x}$$

Pour déterminer la valeur de la constante, on voudrait faire tendre x vers 0. On a donc besoin de la continuité de F en 0. Il suffirait pour cela de pouvoir appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour $x \in [0,1]$. La seule hypothèse qui pose problème est la domination. Par une étude de fonction (ou un argument de concavité), on remarque que $\forall u \geqslant 0,\ 1 - e^{-u} \leqslant u$. On a alors

$$\forall x \in [0,1],\ \forall t > 0,\ \left|\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\right| \leqslant \begin{cases} x & \text{si } t \leqslant 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{sinon} \end{cases} \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{sinon} \end{cases} = \varphi(t)$$

φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc continuité de F sur $[0,1]$. Comme $F(0) = 0$, le passage à la limite évoqué plus haut donne $c = 0$ et donc

$$\forall x > 0,\ F(x) = \sqrt{\pi x}$$

2. 2.1. Il est immédiat que $\varphi(\lambda M + N) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$ et donc que φ est linéaire. C'est ainsi un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2. On voit facilement que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Ainsi, φ est une involution linéaire, c'est à dire une symétrie. Pour détailler les questions, $X^2 - 1$ annule φ et toute valeur propre de φ est donc racine de ce polynôme, c'est à dire est de carré égal à 1.

2.3. $X^2 - 1$ étant scindé simple, φ est diagonalisable. Les sous-espaces propres sont

$$E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_{1,2} + E_{2,1}),\ E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} - E_{2,1})$$

Les inclusion réciproques sont de simples vérifications et on a les égalités par dimension puisque l'on sait que la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 4.

Planche A41 — CCINP 2017

1. Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = k(1-p)^{k-1}p^2$.

1.1. Montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité.

1.2. Soit X une variable aléatoire telle que $P(X = k) = p_k$.
Calculer $E(X-1)$, $E((X-1)(X-2))$, $E(X)$ et $V(X)$.

2. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

Solution

1. 1.1. On sait que (somme d'une série géométrique et dérivation d'une série entière)

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En particulier,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p^2 \frac{1}{p^2} = 1$$

Les p_k sont positifs et de somme 1 et définissent donc une loi de probabilité.

1.2. Pour tout i, $k^i p_k$ est le terme général d'une série convergente (négligeable devant $1/k^2$ par croissances comparées et puisque $(1-p) \in]0,1[$). X admet donc des moments à tout ordre. Par formule de transfert,

$$E(X-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)p_k = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)k(1-p)^{k-1}$$

En redérivant la série entière de la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

On en déduit que

$$E(X-1) = p^2(1-p)\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p}$$

De même,

$$E((X-1)(X-2)) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-2)(k-1)p_k = p^2(1-p)^2\frac{6}{p^4} = \frac{6(1-p)^2}{p^2}$$

On conclut que

$$E(X) = E(X-1) + 1 = \frac{2(1-p)}{p} + 1 = \frac{2-p}{p}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E((X-1)(X-2) + 3X - 2) - E(X)^2 \\ &= E((X-1)(X-2)) + 3E(X) - 2 - E(X)^2 \\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

2. Supposons (analyse) que A convienne. On a alors $A = I_3 - (A^T)^2$ et donc

$$A = I_3 - (I_3 - A^2)^2 = 2A^2 - A^4$$

Ainsi $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X^2 + X - 1)$ annule A. Si λ est une valeur propre de A alors il existe un vecteur propre associé E et on a $A^k E = \lambda^k E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (récurrence) et donc $0 = P(A)E = P(\lambda)E$ (combinaisons linéaires). Comme $E \neq 0$ (vecteur propre), on en déduit que $P(\lambda) = 0$.
Le discriminant de $X^2 + X - 1$ est > 0 et P possède 4 racines réelles qui sont simples (0 et 1 ne sont pas racine de $X^2 + X - 1$). Ainsi P est scindé simple. A est donc diagonalisable. Notons a, b, c ses valeurs propres (éventuellement égales). On a $a+b+c = \mathrm{Tr}(A) = 0$, on en déduit que $a+b+c = 0$. La seule façon de choisir trois éléments parmi $0, 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ (éventuellement égaux) de façon à avoir une somme nulle est de choisir les trois nombres $1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$. $A^T = I_3 - A^2$ est alors semblable à $\mathrm{diag}(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ et n'est pas inversible. Ceci est impossible car A (et donc A^T) est inversible (0 n'est pas valeur propre de A).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux sur la diagonale qui sont nuls.

   1.1. A est-elle diagonalisable ?

   1.2. Calculer $(A+I_n)^2$.

   1.3. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A.

   1.4. Donner les valeurs propres possibles pour A.

   1.5. Donner celles qui sont effectivement valeurs propres.

2. Soit E un espace euclidien. On se donne a et b deux vecteurs de E non colinéaires. On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall x \in E, \qquad u(x) = (a|x)b + (b|x)a$$

   2.1. Déterminer l'image et le noyau de u.

   2.2. Calculer le polynôme caractéristique de u et donner les valeurs propres de u.

   2.3. L'endomorphisme u est-il symétrique ?

SOLUTION

1. 1.1. A est diagonalisable puisque symétrique réelle.

1.2. $J = A + I_n$ a tous ses coefficients égaux à 1 et $J^2 = nJ$. On a donc

$$(A+I_n)^2 = n(A+I_n)$$

1.3. Notons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Soit λ une valeur propre de A et e un vecteur propre associé. On a $Ae = \lambda e$ et par récurrence simple

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k e = \lambda^k e$$

En combinant linéairement ces relations, on obtient

$$P(A)e = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k e = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k e = P(\lambda)e$$

Si P annule A, on obtient $P(\lambda)e = 0$ et comme e n'est pas le vecteur nul (c'est un vecteur propre), on a $P(\lambda) = 0$.

1.4. Ici, $(X+1)^2 - n(X+1) = (X+1)(X-(n-1))$ annule A et donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, n-1\}$$

1.5. $(1,\dots,1)$ est propre associé à $n-1$ et $n-1$ est bien valeur propre.
$(1,-1,0\dots,0), (1,0,-1,0,\dots,0), \dots, (1,0,\dots,0,-1)$ sont propres asscociés à -1 et -1 est valeur propre.
Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, un raisonnement par dimension donne même

$$E_{n-1}(A) = \mathrm{Vect}((1,\dots,1))$$

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}((1,-1,0\dots,0), (1,0,-1,0,\dots,0), \dots, (1,0,\dots,0,-1))$$

2. 2.1. Notons P le plan engendré par a et b.
Recherchons d'abord le noyau de u. Soit $x \in E$. La famille (a,b) étant libre,

$$x \in \mathrm{Ker}(u) \iff (a|x) = 0 = (b|x).$$

Donc $\mathrm{Ker}(u) = P^\perp$.
P étant un plan, si on note n la dimension de E, alors le noyau de u est de dimension $n-2$. Par le théorème du rang, l'image de u est de dimension 2. On a clairement $\mathrm{Im}(u) \subset P$. On en déduit par dimension que $\mathrm{Im}(u) = P$.
On a donc le noyau et l'image de u supplémentaires orthogonaux.

2.2. On note $\mathscr{B}$ la concaténée d'une base du noyau de u et de (a,b) qui est une base de P. La matrice représentative de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a|b) & \|b\|^2 \\ 0 & \|a\|^2 & (a|b) \end{pmatrix}$$

le zéro en haut à gauche étant un bloc de taille $n-2$. On en déduit que

$$\chi_u = \mathrm{X}^{n-2}\left((\mathrm{X}-(a|b))^2 - \|a\|^2\|b\|^2\right).$$

Les racines de $(\mathrm{X}-(a|b))^2 - \|a\|^2\|b\|^2$ sont

$$\lambda_1 = (a|b) + \|a\|\ \|b\| \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = (a|b) - \|a\|\ \|b\|.$$

λ_1 et λ_2 ne sont pas nulles car sinon, $|(a|b)| = \|a\|\ \|b\|$ et par le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (a,b) serait liée, ce qui n'est pas. a et b étant non nuls, λ_1 et λ_2 sont distinctes.
Les valeurs propres de u sont donc 0, de multiplicité $n-2$ et λ_1 et λ_2, de multiplicité 1.

2.3. Soient x et y dans E.

$$\begin{aligned}(u(x)|y) &= ((a|x)b + (b|x)a)|y) \\ &= (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}(x|u(y)) &= (x|((a|y)b + (b|y)a)) \\ &= (x|b)(a|y) + (x|a)(b|y).\end{aligned}$$

La symétrie du produit scalaire donne bien $(u(x)|y) = (x|u(y))$: u est symétrique.

Planche A43 — CCINP 2017

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = y(0)\cos x$.
2. On fixe $n \geqslant 2$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Quel est le rang de A ?

2.2. Que vaut la rang de A^2 ?

2.3. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires.

2.4. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle f est représenté par la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

2.5. Montrer que B est inversible.

2.6. Calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{B})$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{B}^2)$.

2.7. Donner le spectre de B. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution

1. Soit f une solution de l'équation. f est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$. En posant $\alpha = y(0) \in \mathbb{R}$, f est solution de l'équation

$$(E) \qquad y'' + y = \alpha \cos x.$$

On résout d'abord l'équation homogène associée : l'ensemble des solutions est le plan vectoriel engendré par cos et sin.
On cherche ensuite une solution particulière de

$$(E') \qquad y'' + y = \alpha \exp(ix).$$

Sa partie réelle sera une solution particulière de (E). Comme i est solution de l'équation caractéristique on cherche une solution de la forme $x \mapsto axe^{ix}$. On trouve, en injectant dans l'équation, $a = \frac{\alpha}{2i}$ et donc $x \mapsto \frac{\alpha x}{2} \sin x$ est solution particulière de (E). Les solutions de (E) sont donc de la forme $x \mapsto \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \frac{\alpha x}{2} \sin x$, avec A et B réels.
Il existe donc A et B réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \frac{\alpha x}{2} \sin x.$$

$f(0) = \alpha$ donne $\mathrm{A} = \alpha$. f est alors de la forme $x \mapsto \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \frac{\mathrm{A}x}{2} \sin x$.
Vérifions que toutes les fonctions $f_{\mathrm{A},\mathrm{B}} : x \mapsto \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \frac{\mathrm{A}x}{2} \sin x$ sont solutions du problème posé, avec A et B deux réels.
Le calcul donne, pour $x \in \mathbb{R}$, $f"(x) + f(x) = \mathrm{A}\cos x$, $f''(0) = 0$ et $\mathrm{A} = f(0)$. $f_{\mathrm{A},\mathrm{B}}$ est bien solution du problème.

2. **2.1.** Toutes les colonnes, sauf la première et la dernière sont nulles, donc $\mathrm{rg(A)} \leqslant 2$. Comme la première et la dernière colonnes ne sont pas colinéaires, $rg(\mathrm{A}) = 2$.

2.2. $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, donc A^2 est aussi de rang 2.

2.3. Par le théorème du rang, il suffit de montrer que le noyau et l'image de f sont en somme directe, i.e. que leur intersection est réduite au singleton 0. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans cette intersection. $f(x) = 0$ donne $x_1 = x_n = 0$. Mais il existe $t = (t_1, \ldots, t_n)$ tel que $x = f(t)$ et donc

$$\left\{\begin{array}{ccc} t_1 & = & x_1 \\ t_1 + t_n & = & x_2 \\ & \vdots & \\ t_1 + t_n & = & x_{n-1} \\ t_n & = & x_n \end{array}\right.$$

Il vient alors $t_1 = t_n = 0$ et donc $x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$. On a bien $x = 0$.

2.4. On choisit une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Les $n-2$ premières colonnes sont donc nulles (par le théorème du rang et la première question, le noyau de f est bien de dimension $n-2$). Les images des deux derniers vecteurs de la base étant dans l'image de f, on a bien la forme voulue pour la matrice représentative de f dans cette base.

2.5. A étant de rang 2 et étant semblable à la matrice obtenue à la question précédente, B est de rang 2. Comme elle est carrée de taille 2, elle est inversible.

2.6. La trace étant un invariant de similitude, $\mathrm{Tr(B)} = \mathrm{Tr(A)} = 2$. De même, B^2 est semblable à $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, donc $\mathrm{Tr(B)} = 2$.

2.7. B est trigonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Notons λ et μ ses valeurs propres (elles sont peut-être égales). La question précédente donne $\lambda + \mu = 2$ et $\lambda^2 + \mu^2 = 2$. $\mu = 2 - \lambda$ et en injectant dans la deuxième équation, on trouve $\lambda = 1$ et donc $\mu = 1$. Le spectre de B est donc le singleton $\{1\}$.
$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donne $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$. B possède un polynôme annulateur scindé à racine simple, B est diagonalisable. Comme son spectre est réduit à 1, B est semblable à I_2 et donc $\mathrm{B} = \mathrm{I}_2$.
Remarque : dès la deuxième question, puisque $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$, on sait que A est un projecteur et que A est diagonalisable, donc f aussi et qu'on peut trouver une matrice représentative diagonale, avec des 0 est des 1 sur la diagonale. Le nombre de 1 est donné par le rang de f (ou sa trace, ce qui, pour un projecteur, est la même chose).

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - \mathrm{P}(n)^{1/3}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Dans la suite, on travaille dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2.1. Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose :

$$(\mathrm{P}\,|\,\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Prouver que $(\cdot\,|\,\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

2.2. Calculer, pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, le produit scalaire $(\mathrm{X}^i\,|\,\mathrm{X}^j)$.

2.3. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\forall\,(u_1,\dots,u_n),\quad f(u_1,\dots,u_n) = \int_0^{+\infty} (1-u_1t-\dots-u_nt^n)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f possède un minimum global.

Solution

1. Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Si P est constant, comme $(n^4+n^2)^{1/4} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
On suppose donc dorénavant que P est de degré $d\in\mathbb{N}^*$ et on note λ son coefficient dominant. Alors $\mathrm{P}(n)^{1/3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda^{1/3}n^{d/3}$ (on a noté abusivement $t\mapsto t^{1/3}$ la bijection réciproque de $t\mapsto t^3$, bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).
Si $d\neq 3$ ou $\lambda\neq 1$, alors (u_n) ne converge pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
On suppose donc maintenant que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, avec a, b et c réels.
On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/4} - n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3} \\ &= n\left(1+\frac{1}{4n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4n}-\frac{a}{3}-\frac{b}{3n}+\frac{a^2}{9n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Si a est non nul, alors (u_n) ne converge pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si a est nul et $\frac{1}{4}-\frac{b}{3}\neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ avec α non nul et par comparaison, $\sum \frac{1}{\alpha}u_n$ diverge (le terme général est équivalent à celui de la série harmonique), et comme $\alpha\neq 0$, $\sum u_n$ est de même nature et donc diverge.
Si $a=0$ et $b=\frac{3}{4}$, alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et par comparaison, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3+\frac{3}{4}\mathrm{X}+c$, avec $c\in\mathbb{R}$.

2. **2.1.** La symétrie est évidente, la bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale, la positivité découle de la positivité de l'intégrale. Enfin, si $\int_0^{+\infty}\mathrm{P}(t)^2e^{-t}dt = 0$, comme $t\mapsto \mathrm{P}(t)^2e^{-t}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est identiquement nulle et l'exponentielle ne s'annulant pas, $\mathrm{P}(t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. P possède alors une infinité de racines, donc $\mathrm{P}=0$.

2.2. Soit $(i,j)\in\mathbb{N}$. $\langle \mathrm{X}^i|\mathrm{X}^j\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}dt$. On pose donc pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt$. On montre alors par récurrence (à l'aide d'une intégration par parties) que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = n!$. Finalement, $\langle \mathrm{X}^i|\mathrm{X}^j\rangle = (i+j)!$.

2.3. Soit $(u_1,\dots u_n)\in\mathbb{R}^n$. $f(u_1,\dots u_n)$ est la distance au carré de 1 au polynôme $u_1\mathrm{X}+\dots+u_n\mathrm{X}^n$.
Si on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\dots,\mathrm{X}^n)$, F est de dimension finie et on sait alors que la distance (au carré) de 1 à F est le minimum de f et est réalisé pour le projeté orthogonal de 1 sur F.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

1.1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et étudier la nature de cette suite.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose maintenant :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

1.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$?

1.4. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit :

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. On définit Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$$

2.1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Quel est le noyau de Φ ?

2.3. Donner les éléments propres de Φ.

2.4. Φ est-il diagonalisable ?

Solution

1. 1.1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ converge par le théorème spécial à certaines séries alternées.

(u_n) est la suite des ses restes : elle est donc bien définie et en tant que restes d'une série convergente, (u_n) converge vers 0.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ en utilisant la majoration de la valeur absolue du reste d'une série alternée donnée par le théorème spécial à certaines séries alternées.

Or $\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

1.3. On note S la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n}(S - u_n) = S\frac{(-1)^n}{n} - v_n.$$

Or, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème spécial à certaines séries alternées. Par la question précédente, $\sum v_n$ converge : par linéarité, $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

1.4. De même, On a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n = \frac{1}{n}(S - u_n) = \frac{S}{n} - v_n.$$

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et $S \neq 0$, donc $\sum \frac{S}{n}$ diverge et comme $\sum v_n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ diverge.

2. 2.1. Φ est linéaire par linéarité de la trace et pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Soit M dans le noyau de Φ. Alors $M = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}A$ et donc $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Or $\Phi(A) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Vect}(A)$.

2.3. On montre que $P = X^2 - \text{Tr}(A)X$ annule Φ et donc $\text{Sp}(\Phi) \subset \{0, \text{tr}(A)\}$. On a déjà vu que 0 est valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par A.
Regardons si Tr(A) est valeur propre de Φ. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\Phi(M) = \text{Tr}(A)M \iff \text{Tr}(M) = 0.$$

Donc Tr(A) est bien valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noyau de la forme linéaire Tr. Il n'y a pas d'autres valeurs propres possibles.

2.4. ϕ est diagonalisable, car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

PLANCHE A46 — CCINP 2017

1. On définit, pour $a \in \mathbb{R}$, la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1. Donner le polynôme caractéristique de A.

1.2. Etudier la diagonalisabilité de A en fonction de a.

2. 2.1. Soient n et p des entiers naturels, avec $0 \leqslant p \leqslant n$. On pose :

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (\ln t)^p \, dt$$

(A) Montrer que $I_{n,p}$ existe.

(B) Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n,p-1}$.

(C) Donner $I_{n,n}$.

2.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x > 0, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x \ln x)^n$$

(A) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.

(B) Exprimer $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.3. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

SOLUTION

1. 1.1. Les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ puis le développement suivant la dernière colonne donnent

$$\chi_A = (X-2)\left((X-1)^2 + 2a\right).$$

1.2. Si $a > 0$, χ_A n'est pas scindé : A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Si $a = 0$, $\chi_A = (X-2)(X-1)^2$ et $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est clairement de rang 2 et donc par le théorème du rang, son noyau est de dimension 1 : le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre de A de multiplicité 1, donc A n'est pas diagonalisable.
Si $a < 0$, $\chi_A = (X-2)(x-1-\sqrt{-2a})(X-1+\sqrt{-2a})$. Regardons s'il y a une valeur propre double. La dernière n'est clairement pas égale aux deux premières. Les deux premières sont égales lorsque $1 + \sqrt{-2a} = 2$, i.e. $a = -\frac{1}{2}$.
Si $a \neq -\frac{1}{2}$, A possède trois valeurs propres deux à deux distinctes : A est diagonalisable.

Si $a = -\frac{1}{2}$, $\chi_A = (X-2)^2 X$ et $a - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est clairement de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1 par le théorème du rang. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc de dimension 1 alors que 2 est valeur propre de multiplicité 2 : A n'est pas diagonalisable.
Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $a < 0$ et $a \neq \frac{-1}{2}$.

2. 2.1. **(a)** $t \mapsto t^n (\ln t)^p$ est continue sur $]0,1]$ et $\sqrt{t}\, t^n (\ln t)^p \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc par comparaison aux fonctions de Riemann de référence, $t \mapsto t^n (\ln t)^p$ est intégrable sur $]0,1]$.

(b) Par intégration par parties, $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto (\ln t)^p$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et le produit de ces deux fonctions tendant vers 0 en 0^+ et valant 0 en 1, on obtient

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

(c) On montre alors par récurrence sur $p \in [\![0,n]\!]$ que $I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$ et donc en particulier,

$$I_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

2.2. **(a)** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sum \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ converge car c'est une série exponentielle.

(b) Sa somme est $e^{-x\ln x} = \frac{1}{x^x}$.

(c) S est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ (cf premières questions).
$\sum g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme est continue sur $]0,1]$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^p |g_n|$. On a $u_n = \frac{I_{n,n}}{n!}$. Par les premières questions, $u_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$ et donc par comparaison, $\sum u_n$ converge. On peut appliquer le théorème d'interversion somme intégrale : $\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\,dx$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Planche A47 — CCINP 2017

1. On introduit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit un produit scalaire sur E en posant, pour $(A,B) \in E^2$, $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices anti-symétriques.

1.1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

1.2. Soit $M \in E$. Exprimer $d(M, S_n(\mathbb{R}))$.

1.3. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Calculer $d(M, S_n(\mathbb{R}))$.

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier fixé. On considère n personnes qui lancent simultanément une pièce équilibrée chacune. Une personne est éliminée si son résultat est différent de celui de tous les autres joueurs. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de tours nécessaires à l'élimination d'une personne.

2.1. Calculer $p_n = \mathbb{P}(X = 1)$.

2.2. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2.3. Exprimer le temps moyen nécessaire pour qu'il ne reste plus que deux personnes en jeu, à l'aide d'une somme, en prenant un tour comme unité de temps.

Solution

1. **1.1.** Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{B}) = -\mathrm{Tr}({}^t(\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A})) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}) = -\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB}) = -(\mathrm{A}|\mathrm{B}).$$

On a donc bien $(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 0$: $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux (et donc en somme directe).
Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) + \frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M})$ et $\frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

1.2. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathrm{E}$. D'après ce qui précède, en notant p la projection orthogonale sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$p(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}).$$

Donc, en notant d la distance de M à $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$d = \|\mathrm{M} - p(\mathrm{M})\| = \|\frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M})\|.$$

D'où

$$d^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left({}^t(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M})(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M})\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(m_{i,j} - m_{j,i})^2.$$

$$d^2 = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(m_{i,j} - m_{j,i})^2.$$

1.3. Dans notre cas particulier, on a $m_{i,j} = i$ pour $i = 1\cdots n$. On a donc

$$d^2 = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2.$$

Le changement d'indice $k = j - i$ donne

$$d^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-i} l^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-i)(n-i+1)(2n-2i+1)}{6}$$

Le changement d'indice $k = n - i$ donne

$$d^2 = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)(2k+1) = \frac{2}{12}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 + \frac{3}{12}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$d^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{24} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{24} + \frac{n(n-1)}{24} = \frac{n(n-1)}{24}(n(n-1) + 2n - 1 + 1)$$

$$d^2 = \frac{n(n-1)}{24}(n(n-1) + 2n) = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{24}.$$

$$d = \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{6}}.$$

2. **2.1.** $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = 2n\frac{1}{2^n}$ puisque l'événement "une personne est éliminée" correspond à l'événement, un personne a obtenu pile et toutes les autres ont obtenu face ou une personne a obtenu face et toutes les autres pile.
2 correspond à ces deux possibilités, n au choix de la personne éliminée parmi n et $\frac{1}{2^n}$ à la probabilité d'obtenir un pile et $n-1$ face lors de n lancers indépendants (ou une face et $n-1$ pile).

2.2. Les tours sont indépendants. Si on appelle "succès" l'élimination d'une personne, X désigne le rang du premier succès et suit donc une loi géométrique de paramètre p_n. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = p_n(1 - p_n^{k-1})$$

et donc

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{p_n} = \frac{2^n}{2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{1-p_n}{p_n^2} = \frac{4^n}{4n^2}\left(1 - \frac{2n}{2^n}\right) = \frac{2^{n-1}(2^{n-1}-n)}{n^2}.$$

2.3. On note X_k la variable aléatoire qui donne le nombre de tours nécessaires à l'élimination d'une personne lorsqu'elles sont k au départ. Alors $T = X_n + X_{n-1} + \cdots + X_3$.

Par linéarité de l'espérance, $E(T) = \sum\limits_{k=3}^{n} E(X_k)$ et donc

$$E(T) = \sum_{k=3}^{n} \frac{2^k}{2k}.$$

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n(\alpha) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$$

1.1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n(2)$ converge.
1.2. En déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 2$.
1.3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n(1)$ diverge.
1.4. En déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n(\alpha)$ pour $\alpha \leqslant 1$.
1.5. Soit $\alpha \in]1,2[$. Montrer que :

$$u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^\beta} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

1.6. Conclure sur la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n(\alpha)$.

2. **2.1.** Montrer qu'il existe une unique fonction φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0,1], \quad \varphi''(x) = -\cos(\pi x).$$

2.2. Plus généralement, soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose :

$$\mathrm{K} : \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases} \end{array}$$

et on définit :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^1 \mathrm{K}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et que $g'' = -f$.
2.3. Retrouver le résultat de la première question.
2.4. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Solution

1. **1.1.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(2) = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)}$$

$u_n(2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{e}\left(\frac{1}{e}\right)^n$. Or $\sum\left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]0,1[$). Par linéarité et comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(2)$ converge absolument.

1.2. Soit $\alpha \geqslant 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^\alpha \geqslant n^2$ et comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est positif, $0 \leqslant u_n(\alpha) \leqslant u_n(2)$. Par comparaison de séries à termes positifs, avec la convergence établie à la question précédente, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(\alpha)$ converge.

1.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(1)$ diverge grossièrement.

1.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(\alpha) = e^{-n^\alpha\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n^{\alpha-1}} v_n(\alpha)$$

avec $v_n(\alpha) = e^{\frac{1}{2n^{2-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)}$ qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, car $2-\alpha > 0$ et donc $\frac{1}{n^{2-\alpha}}$ tend vers 0. Finalement, on a bien montré que $u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^\beta}$ avec $\beta = \alpha - 1 > 0$.

1.5. On a alors $n^2 u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2\ln n - n^\beta}$. Or, par croissances comparées, l'exposant diverge vers $-\infty$ et donc $n^2 u_n(\alpha)$ tend vers 0 en $+\infty$ et par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(\alpha)$ converge.

2. 2.1. Soit φ une solution du problème. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi'(x) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + C$, puis il existe $D \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + Cx + D$.
$\varphi(0) = 0$ donne alors $D = -\frac{1}{\pi^2}$.
$\varphi(1) = 0$ donne alors $C = \frac{2}{\pi^2}$.
Si une solution existe, la seule possible est $\varphi : x \mapsto \frac{\cos(\pi x)+2x-1}{\pi^2}$.
On vérifie ensuite que cette fonction est bien solution du problème.

2.2. Pour $x \in [0,1]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x y(1-x)f(y)dy + \int_x^1 x(1-y)f(y)dy \\ g(x) &= (1-x)\int_0^x yf(y)dy - x\int_1^x (1-y)f(y)dy. \end{aligned}$$

$y \mapsto yf(y)$ et $y \mapsto (1-y)f(y)$ sont continues sur $[0,1]$. Par le théorème fondamental, $x \mapsto \int_0^x yf(y)dy$ et $x \mapsto \int_1^x (1-y)f(y)dy$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et par linéarité, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\int_0^x yf(y)dy + (1-x)xf(x) - \int_1^x (1-y)f(y)dy - x(1-x)f(x) \\ g'(x) &= -\int_0^x yf(y)dy - \int_1^x f(y)dy - \int_x^1 yf(y)dy \\ g'(x) &= -\int_0^1 yf(y)dy - \int_1^x f(y)dy. \end{aligned}$$

f étant continue sur $[0,1]$, par le théorème fondamental $x \mapsto \int_1^x f(y)dy$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\int_0^1 yf(y)dy$ étant une constante, g' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$:

$$g''(x) = -f(x).$$

On remarque que l'on a aussi $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

2.3. Pour $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = \int_0^1 K(x,y)\cos(\pi y)dy$. Montrons que $g(x) = \varphi(x)$, trouvé à la première question.

$$g(x) = (1-x)\int_0^x y\cos(\pi y)dy + x\int_x^1 (1-y)\cos(\pi y)dy.$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} g(x) &= (1-x)\left\{\left[y\frac{\sin(\pi y)}{\pi}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\sin(\pi y)}{\pi}dy\right\} \\ &\quad + x\left\{\left[(1-y)\frac{\sin(\pi y)}{\pi}\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{\sin(\pi y)}{\pi}dy\right\} \\ g(x) &= (1-x)\left\{\frac{x\sin(\pi x)}{\pi} - \left[-\frac{\cos(\pi y)}{\pi^2}\right]_0^x\right\} + x\left\{-(1-x)\frac{\sin(\pi x)}{\pi} - \left[\frac{\cos(\pi y)}{\pi^2}\right]_x^1\right\} \\ g(x) &= (1-x)x\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + (1-x)\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{1-x}{\pi^2} + x(x-1)\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{x\cos(\pi x)+x}{\pi^2} \\ g(x) &= \frac{\cos(\pi x)+2x-1}{\pi^2}. \end{aligned}$$

On retrouve bien $g = \varphi$.

2.4. On a $f = -g''$, donc on a, par intégration par parties,

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 -g''(t)g(t)dt = \left[-g'(t)g(t)\right]_0^1 - \int_0^1 -g'(t)g'(t)dt = \int_0^1 \left(g'(t)\right)^2 dt$$

puisque $g(0) = g(1) = 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

1.1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?

1.2. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose J_n la matrice carrée de taille n dont tous les éléments sont des 1 et $\mathrm{A}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{J}_n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$.

2.1. Montrer que A_{n+1} est diagonalisable.

2.2. Montrer que J_n est diagonalisable et la diagonaliser.

2.3. Construire un vecteur du noyau de A_{n+1} à partir d'un vecteur du noyau de J_n.

2.4. Diagonaliser A_{n+1}.

Solution

1. 1.1. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\mathrm{S_N} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} x^n \sin(\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1-x^{\mathrm{N}+1}}{1-x} \sin(\pi x) dx.$$

(On peut voir l'intégrale comme l'intégrale sur $[0,1[$.)

$$\mathrm{S_N} = \int_0^1 \frac{1}{1-x} \sin(\pi x) dx - \int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}+1}}{1-x} \sin(\pi x) dx.$$

La première intégrale du membre de gauche existe bien, car on intègre une fonction continue sur $[0,1[$ et par changement de variable $y = 1-x$, la fonction est équivalente à $\frac{\sin(\pi y)}{y}$ au voisinage de 0, qui est intégrable car prolongeable par continuité en 0. La deuxième existe bien alors, par linéarité.
Le changement de variable $y = 1-x$ (de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $[0,1]$ sur $[0,1]$), dans la première intégrale du membre de droite donne :

$$\mathrm{S_N} = \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{y} dy - v_\mathrm{N} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt - v_\mathrm{N}$$

par changement de variable $t = \pi y$. On a par ailleurs $v_\mathrm{N} = \int_0^1 x^{\mathrm{N}+1} f(x) dx$, avec pour $x \in [0,1[$, $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$, prolongeable par continuité au segment $[0,1]$ (vu précédemment). f est donc bornée : soit M un majorant de sa valeur absolue. On a alors

$$|v_\mathrm{N}| \leqslant \int_0^1 x^{\mathrm{N}+1} \mathrm{M} dx \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}+2}.$$

On a bien (v_N) qui converge vers 0 et $(\mathrm{S_N})$ qui converge : $\sum u_n$ converge.

1.2. On a aussi montré

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{S_N} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

2. 2.1. A_{n+1} est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2.2. J_n est aussi symétrique réelle donc diagonalisable. Son rang étant clairement 1, 0 est valeur propre et la dimension de son sous-espace propre est $n-1$, par le théorème du rang. On remarque enfin que $((1,-1,0,\dots,0),(1,0,-1,0,\dots,0),\dots,(1,0,\dots,0,-1))$ est une base de ce noyau.
On a par ailleurs, $\mathrm{J}_n^2 = n\mathrm{J}_n$ et donc le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - n\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-n)$ annule J_n (comme il est scindé à racines simples, on retrouve que J_n est diagonalisable) et on sait alors que le spectre de J_n est inclus

dans l'ensemble des racines de P, i.e. les valeurs propres possible de J_n sont 0 et n. 0 ne peut pas être la seule valeur propre de J_n, sinon, comme le sous-espace propre associé à 0 n'est pas de dimension n, J_n ne serait pas diagonalisable. n est donc valeur propre et il est facile de voir que $(1,\dots,1)$ est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n. Par dimension, le sous-espace propre associé à la valeur propre n est la droite vectorielle engendrée par $(1,\dots,1)$.

2.3. Si $v=(x_1,\dots,x_n)$ est un élément du noyau de J_n, alors $w=(x_1,\dots,x_n,0)$ est un élément du noyau de A_{n+1}. Le noyau de A_{n+1} est donc de dimension au moins $n-1$. Comme de la même manière, $(1,\dots,1,0)$ est vecteur propre de A_{n+1} associé à la valeur propre n et comme par construction de A_{n+1}, $(0,\dots,0,1)$ est aussi un vecteur propre de A_{n+1} pour la valeur propre n, le sous-espace propre de A_{n+1} associé à la valeur propre n est de dimension au moins 2. Par dimensions, (les sous-espaces propres sont en somme directe et leur somme est incluse dans $\mathbb{R}^{n+1}$), on a

$$\begin{aligned}
E_0(A_{n+1}) &= \mathrm{Vect}((1,-1,0,\dots,0,0),\dots,(1,0,\dots,0,-1,0))\\
E_n(A_{n+1}) &= \mathrm{Vect}((1,\dots,1,0),(0,\dots,0,1)).
\end{aligned}$$

Planche A50 — CCINP 2017

1. Prouver l'identité suivante :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

après avoir prouvé l'existence de l'intégrale du membre de gauche.

2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie E tel que $u^3=\frac{1}{3}(u^2+u+\mathrm{I}d)$.

2.1. Montrer que u est inversible.

2.2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u^n\in\mathrm{Vect}(\mathrm{I}d,u,u^2)$.

2.3. On suppose dans cette question que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2.4. Même question dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Solution

1. 1.1. On pose $f : x\mapsto \frac{x}{\mathrm{sh}\,x}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude de l'intégrabilité sur $]0,1]$. $f(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}1$, f est donc prolongeable par continuité au segment $[0,1]$, f est bien intégrable sur $]0,1]$.

Étude de l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$. $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}2xe^{-x}$ et donc $f(x)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Comme $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et I existe.

1.2. Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}=2xe^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x}$. On pose donc, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto 2xe^{-(2n+1)x}$ et on va appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale.
Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $]0,1]$, car prolongeable par continuité et sur $[1,+\infty[$, par comparaison avec $x\mapsto\frac{1}{x^2}$).
(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa limite simple est f, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\int_0^{+\infty}|f_n|$. On a $u_n=\int_0^{+\infty}2x^{-(2n+1)x}dx$. On calcule cette intégrale par intégration par parties. $x\mapsto 2x$ et $x\mapsto\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et leur produit converge vers 0 en 0 et en $+\infty$ (par croissances comparées). On a donc

$$u_n=-\int_0^{+\infty}2\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)}dx=\frac{2}{2n+1}\left[\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{2}{(2n+1)^2}.$$

On a donc $\sum u_n$ qui converge (par comparaison aux séries de Riemann). Par le théorème d'interversion somme-intégrale, $\mathrm{I}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}$.

2. 2.1. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - \frac{1}{3}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$. P annule u. Le spectre de u est donc inclus dans l"ensemble des racines de P. Or 0 n'est pas racine de P, donc 0 n'est pas valeur propre de u : u est injectif et donc bijectif (c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).

2.2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que u^n est une combinaison linéaire de $\mathrm{I}d$, u et u^2.
C'est immédiat pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. C'est encore vrai pour $n = 3$, par hypothèse sur u.
Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ tel que l'hypothèse de récurrence soit vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$.
On a $u^n = a_n \mathrm{I}d + b_n u + c_n u^2$ par hypothèse de récurrence, avec a_n, b_n et c_n trois éléments de $\mathbb{K}$. On a alors $u^{n+1} = a_n u + b_n u^2 + c_n u^3$, mais comme $u^3 = \frac{1}{3}(\mathrm{I}d + u + u^2)$, on a alors

$$u^{n+1} = \frac{c_n}{3}\mathrm{I}d + \frac{3a_n + c_n}{3}u + \frac{3b_n + c_n}{3}u^2$$

et on a bien prouvé que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$.

2.3. On étudie la fonction associée au polynôme P : on trouve que P ne possède qu'une seule racine dans $\mathbb{R}$. f possède donc au plus une valeur propre. Si f est diagonalisable, f est une homothétie, de rapport λ, unique zéro réel de P. Réciproquement, si u est cette homothétie, P est bien un polynôme annulateur de u et u est bien diagonalisable. Donc u est diagonalisable si et seulement si u est cette homothétie.

2.4. P possède trois valeurs propres deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ (la racine réelle précédemment trouvée plus deux autres, complexes conjuguées, non réelles). u possède donc un polynôme annulateur scindé à racines simples : u est diagonalisable.

PLANCHE A51 — CCINP 2017

1. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on définit les fonctions φ et $f_{n,p}$ sur $]0,1]$ en posant :

$$\forall x \in]0,1], \quad \varphi(t) = t^t \qquad \text{et} \qquad f_{n,p}(t) = t^n (\ln t)^p$$

1.1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a posé $u_n = 1/n^n$.

1.2. Prouver l'existence de l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

1.3. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'existence et calculer la valeur des intégrales :

$$\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 f_{n,p}(t)\,\mathrm{d}t$$

1.4. Établir que :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$$

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. À quelles conditions a-t-on $\mathrm{X}^n \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

2.2. On définit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ qui à P associe $\mathrm{X}^n \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$.
Montrer que u est diagonalisable et chercher une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ constituée de vecteurs propres de u.

SOLUTION

1. 1.1. Pour $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

1.2. Pour $t \in]0,1]$, $\varphi(t) = e^{t\ln t}$ et donc φ est continue sur $]0,1]$. Par croissances comparées, $t\ln t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et donc $\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ par continuité de l'exponentielle. φ est prolongeable par continuité au segment $[0,1]$: elle est intégrable sur $]0,1]$. I existe donc.

1.3. $f_{n,p}$ est continue sur $]0,1]$. $\sqrt{t}f_{n,p}(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées ($n+\frac{1}{2}>0$)) et donc $f_{n,p}$ est négligeable devant $t\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0, or cette dernière est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de référence). Par comparaison, $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Par intégration par parties, $\mathrm{I}_{n,p+1} = -\frac{p+1}{n+1}\mathrm{I}_{n,p}$ et donc par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$, on trouve $\mathrm{I}_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$.

1.4. Pour $t\in]0,1]$, $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\ln t)^n}{n!}$. On va donc appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale. On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\mapsto \frac{(t\ln t)^n}{n!}$, définie sur $]0,1]$.
Chaque f_n est continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ ($f_n = \frac{1}{n!}f_{n,n}$).
$\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme est φ, qui est bien continue sur $]0,1]$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^1 |f_n|$. Avec ce qui précède, $v_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = u_{n+1}$. La première question assure la convergence de $\sum v_n$.
On peut donc appliquer le théorème d'interversion somme intégrale :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(t\ln t)^n}{n!}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

2. 2.1. Montrons que la condition cherchée est : "le degré de P est inférieur ou égal à n".
Si $\deg(\mathrm{P})\leqslant n$, alors $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$ et

$$\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\mathrm{X}^l.$$

Donc $\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$ est bien un polynôme à coefficients réels.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$ est bien un polynôme à coefficients réels. Alors, par l'absurde, supposons que le degré de P est strictement supérieur à n, notons le d. Notons λ le coefficient dominant de P et R le polynôme de degré inférieur ou égale à $d-1$ tel que $\mathrm{P} = \lambda\mathrm{X}^d + \mathrm{R}$. Alors

$$\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \frac{\lambda}{\mathrm{X}^{d-n}} + \mathrm{X}^n\mathrm{R}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$$

et comme $\deg\left(\mathrm{X}^n\mathrm{R}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\right) \geqslant n-d+1$, $\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$ est une fraction rationnelle de degré $n-d<0$ et ne peut donc pas être un polynôme : contradiction et donc P est de degré inférieur ou égal à n.

2.2. $u^2 = \mathrm{I}d$ et donc X^2-1 est un polynôme annulateur de u, scindé à racines simples : u est diagonalisable. Ses valeurs propres sont 1 ou -1. On s'intéresse donc aux équations $\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}$ (1) et $\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = -\mathrm{P}$ (2).
En écrivant $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$, on trouve que P est solution de (1) si et seulement si $a_k = a_{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. P est solution de (2) si et seulement si $a_k = -a_{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
On a donc, si $n=2p$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E}_1(u) & = & \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^{2p}+1, \mathrm{X}^{2p-1}+\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{p+1}+\mathrm{X}^{p-1}, \mathrm{X}^p) \\ \mathrm{E}_{-1}(u) & = & \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^{2p}-1, \mathrm{X}^{2p-1}-\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{p+1}-\mathrm{X}^{p-1} \end{array}$$

$\mathrm{E}_1(u)$ est de dimension $p+1$ et $\mathrm{E}_{-1}(u)$ est de dimension p. La somme des deux dimensions est $2p+1 = n+1$ qui est bien la dimension de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Et si $n = 2p+1$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E}_1(u) & = & \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^{2p+1}+1, \mathrm{X}^{2p}+\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{p+1}+\mathrm{X}^p,) \\ \mathrm{E}_{-1}(u) & = & \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^{2p+1}-1, \mathrm{X}^{2p}-\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{p+1}-\mathrm{X}^p \end{array}$$

$\mathrm{E}_1(u)$ est de dimension $p+1$ et $\mathrm{E}_{-1}(u)$ est de dimension $p+1$. La somme des deux dimensions est $2p+2 = n+1$ qui est bien la dimension de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. Donner la nature et la somme en cas de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$.
2. **2.1.** Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
   2.2. Soient A et B dans $GL_n(\mathbb{C})$. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $N \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer N^{-1}.
   2.3. Calculer N^2 et P(N) pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
   2.4. Montrer que si N est diagonalisable, alors AB est diagonalisable.
   2.5. Étudier la réciproque.

Solution

1. Il s'agit d'une série entière. Notons a_n son coefficient d'indice n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant n$. Donc si on note R_1, R_2 et R_3 les rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$, $\sum a_n x^n$ et $\sum n x^n$ respectivement, on a $R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3$. Or $R_1 = R_3 = 1$, car, quitte à multiplier par n, on se ramène à $\sum x^n$ qui est de rayon de convergence 1 et la multiplication par n du coefficient général ne change pas le rayon de convergence de la série entière. Finalement, $R_2 = 1$.
   Etudions la convergence en -1 et 1 : dans les deux cas il y a divergence grossière. Donc la série converge si et seulement si $|x| < 1$.
   Calculons la somme. Soit $x \in]-1, 1[$. On a
   $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$
   On peut séparer en deux $S(x)$ car chacune des séries converge. On a alors,
   $$S(x) = 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} + T(x).$$
   On reconnaît alors dans la première somme, la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ en x^2 et on peut dériver la deuxième terme à terme, car il s'agit de la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, on a alors
   $$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + T(x)$$
   avec $T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$.
   Comme $T(0) = 0$, on a $T(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)$ et finalement,
   $$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
2. **2.1.** Supposons M^2 diagonalisable. Notons P le polynôme annulateur de M^2, scindé à racines simples tel que $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$, les λ_k étant les valeurs propres de M^2. On sait que M^2 est inversible, donc aucun des λ_k ne vaut 0. Posons $Q = P(X^2)$. Alors Q annule M et Q est scindé à racines simples car pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_k^2 = \lambda_k$ et alors $Q = \prod_{k=1}^{p} (X - \mu_k) \prod_{k=1}^{p} (X + \mu_k)$ qui est bien à racines simples car les λ_k sont deux à deux distincts et non nuls.
   M possédant un polynôme annulateur scindé à racines simples, M est diagonalisable.
   2.2. Posons $N' = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Alors $NN' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & In \end{pmatrix} = I_{2n}$ et donc N est inversible et son inverse est N'.
   2.3. $N^2 = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ et pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0 \\ 0 & P(AB) \end{pmatrix}$. (Par récurrence sur k pour N^{2k} puis par linéarité.
   2.4. Si N est diagonalisable, alors N^2 est diagonalisable. Soit P un polynôme annulateur de N^2, scindé à racines simples, alors $P(AB) = 0$ et donc AB est diagonalisable.
   2.5. Supposons AB diagonalisable. Soit P un polynôme annulateur de AB, scindé à racines simples. Montrons que P annule BA. En fait $BP(AB)A = BAP(BA) = 0$; comme A et B sont inversibles, on a bien $P(BA) = 0$. Alors $P(N^2) = 0$ et N^2 est diagonalisable. On utilise alors la première question : N est diagonalisable.

B. Concours Mines – Télécom

Planche B1 — Mines – Télécom 2023

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1.1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeurs réelles strictement positives vérifiant $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ainsi que $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$, justifier que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

1.2. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
On pourra se servir de la formule de Stirling.

2. Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que leurs valeurs propres soient sur leur diagonale.

2.1. Montrer que toute matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$.

2.2. La matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est-elle dans $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$?

2.3. L'ensemble $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2.4. Si $\mathrm{M} \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$, prouver que $\mathrm{M} + a\mathrm{I}_n \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2.5. Prouver qu'une matrice de $\mathrm{D}_2(\mathbb{R})$ est triangulaire.

Solution

1. 1.1. Toutes les quantités en jeu étant strictement positives d'après l'énoncé, on peut bien composer par la fonction ln. Pour $n \geqslant 0$, grâce aux hypothèses de l'énoncé :

$$\ln(v_n) = \underbrace{\ln(u_n)}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{v_n}{u_n}\right)}_{\to 0}$$

Ainsi $\ln(v_n) = \ln(u_n) + o_{+\infty}(\ln(u_n))$, ce qui donne bien $\ln(v_n) \sim_{+\infty} \ln(u_n)$.

1.2. On réalise une comparaison série – intégrale pour trouver un équivalent du numérateur de a_n. La fonction $t \mapsto 1/t$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

En sommant de $k = 2$ à $n \geqslant 2$, en utilisant la relation de Chasles et en rajoutant le terme pour $k = 1$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 1 + \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Cela donne après calculs :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 1 - \ln 2 + \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$$

Les deux extrémités étant équivalentes à $\ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient par encadrement que le numérateur de a_n est équivalent à $\ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour le dénominateur, grâce à la formule de Stirling et au résultat de la question précédente, on peut écrire :

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right] = n\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$$

Par quotient, on obtient que a_n est équivalent à $1/n$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs avec une série de Riemann divergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.

2. 2.1. Par le cours, les valeurs propres d'une matrice triangulaire se trouvent sur sa diagonale.

2.2. Si $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur colonne dont les coordonnées valent toutes 1, on a directement $JU = nU$. Puisque $U \neq 0$, on en déduit que n est valeur propre de J. Mais n ne se trouve pas sur la diagonale de J ($n \geqslant 2$) donc $J \notin D_n(\mathbb{R})$.

2.3. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients au dessus de la diagonale au sens large sont égaux à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. On introduit également $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients en dessous de la diagonale au sens strict sont égaux à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Les matrices A et B sont triangulaires et sont donc dans $D_n(\mathbb{R})$ d'après la question **2.1**. On observe par contre que $A + B = J$ n'est pas dans $D_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. Ceci démontre que $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par somme, ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.4. On fixe $a \in \mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_{M+aI_n}(\lambda) = \det(\lambda I_n - (M + aI_n)) = \det((\lambda - a)I_n - M) = \chi_M(\lambda - a)$$

Dès lors, λ est valeur propre de $M + aI_n$ équivaut à $\chi_{M+aI_n}(\lambda) = 0$, c'est-à-dire à $\chi_M(\lambda - a) = 0$, soit à $\lambda - a$ valeur propre de M. On en déduit :

$$\mathrm{sp}(M + aI_n) = \left\{a + \mu,\ \mu \in \mathrm{sp}(M)\right\}$$

La matrice M étant dans $D_n(\mathbb{R})$, les $(\mu)_{\mu\in\mathrm{sp}(M)}$ sont en fait les coefficients diagonaux de M. Ainsi, les $(a + \mu)_{\mu\in\mathrm{sp}(M)}$ sont les coefficients diagonaux de $M + aI_n$, ce qui donne bien que les valeurs propres de $M + aI_n$ sont sur sa diagonale. On a bien prouvé que $M + aI_n \in D_n(\mathbb{R})$.

2.5. On se donne une matrice M de $D_2(\mathbb{R})$ sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(M)\lambda + \det(M) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque M est dans $D_2(\mathbb{R})$, les valeurs propres de M sont a et d (éventuellement confondues). Ainsi a et d sont les racines de χ_M. Le terme constant de ce polynôme unitaire du second degré valant le produit des racines, on en déduit que $ad - bc = ad$, c'est-à-dire $bc = 0$. Ainsi $b = 0$ ou $c = 0$, ce qui donne que M est triangulaire.

PLANCHE B2 — MINES – TÉLÉCOM 2023

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$−espace vectoriel E qui vérifie $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$.

- **1.1.** Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E) = E$.
- **1.2.** L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Pour tout réel x tel que la définition ait un sens, on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- **2.1.** Montrer que φ est bien définie sur $]\,1\,,+\infty\,[$.
- **2.2.** Justifier que φ est continue $]\,1\,,+\infty\,[$.
- **2.3.** Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,1\,,+\infty\,[$.
- **2.4.** Prouver que φ est convexe sur $]\,1\,,+\infty\,[$.
- **2.5.** Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

SOLUTION

1. 1.1. On raisonne par analyse – synthèse pour prouver la décomposition en somme directe. Dans la suite, on note $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et $E_3 = \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$.

- **Analyse :** On se donne $x \in E$. On cherche $y \in E_2$ et $z \in E_3$ tels que $x = y + z$. En composant par f, il vient $f(x) = 2y + 3z$. Par combinaisons linéaires sur ces deux équations, on en déduit :

$$y = 3x - f(x) \qquad \text{et} \qquad z = f(x) - 2x$$

- **Synthèse :** Pour $x \in \mathrm{E}$, on définit y et z comme ci-dessus et on va devoir vérifier que $x = y + z$ (1), $y \in \mathrm{E}_2$ (2) et $z \in \mathrm{E}_3$ (3). Le point (1) est trivial. Pour le point (2), il s'agit de vérifier que $f(y) = 2y$. Mais, par linéarité de f et avec la relation de l'énoncé, on a $f(y) = f(3x - f(x)) = 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - 5f(x) + 6x = 6x - 2f(x) = 2y$ comme souhaité. On procède de façon similaire pour vérifier le point (3).

On a ainsi prouvé que tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{E}_2$ et $z \in \mathrm{E}_3$, c'est-à-dire que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id_E})$.

1.2. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id_E})$ et $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id_E})$ sont des sous-espaces propres de f (associés aux valeurs propres 2 et 3). La question précédente prouve donc que E est somme directe d'espaces propres de f. Ainsi, par le cours, f est diagonalisable.

2. 2.1. Pour tout $x > 1$, la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^x$ est convergente, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ existe.

2.2. On utilise le théorème de continuité d'une somme de séries de fonctions. Les fonctions $u_n : x \mapsto 1/n^x$ pour $n \geqslant 1$ sont continues sur $]1, +\infty[$ et pour tout segment $[a, b]$ de l'intervalle $]1, +\infty[$, on a, pour $n \geqslant 1$, $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} = 1/n^a$, terme général d'une série convergente. Ainsi il y a convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions définissant φ sur tout segment de $]1, +\infty[$. Le théorème s'applique donc et φ est continue sur $]1, +\infty[$.

2.3. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ d'une somme de séries de fonctions. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ avec $u_n'(x) = -\ln n/n^x$ pour $x \in]1, +\infty[$ et $n \geqslant 1$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ par la question **2.1**. Enfin, on peut vérifier que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$. En effet, on a $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} = \ln n/n^a$ qui est le terme général d'une série convergente par critère de Riemann puisque $n^{\frac{1+a}{2}} \ln n/n^a$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Le théorème s'applique donc et φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

2.4. De la même façon qu'à la question précédente, on pourrait montrer en utilisant le théorème de classe $\mathscr{C}^2$ d'une somme de série de fonctions que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ avec :

$$\forall x > 1, \quad \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que φ'' est positive sur $]1, +\infty[$ et donc que φ est convexe sur $]1, +\infty[$.

2.5. On utilise le théorème de la double–limite. Pour chaque $n \geqslant 1$, la fonction u_n admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ qui vaut 1 si $n = 1$ et 0 sinon. De plus, on a, pour $n \geqslant 1$, $\|u_n\|_{\infty,[2,+\infty[} = 1/n^2$, terme général d'une série convergente. Ainsi il y a convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions définissant φ sur $[2, +\infty[$ qui est un voisinage de $+\infty$. Le théorème s'applique et on conclut que :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1$$

Planche B3 — Mines – Télécom 2023

1. Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

2. Soit R un prédateur. On note pour A_i : « R mange une proie le jour i » pour $i \geqslant 1$. Si R a mangé la veille, il ne mange pas ; s'il n'a pas mangé la veille, il mange avec une probabilité 1/2. On suppose que R n'a pas mangé la veille du jour 1. On notera $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$ pour $i \geqslant 1$.

2.1. Calculer la probabilité que R n'ait pas mangé jusqu'au jour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2. Donner la probabilité que R mange pour la première fois le jour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3. Calculer p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geqslant 1$.

2.4. En déduire p_i en fonction de $i \in \mathbb{N}^*$.

Solution

1. La fonction $f : t \mapsto e^{-t}(1/(1-e^{-t}) - 1/t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. On étudie ensuite le comportement de l'intégrale en 0 et en $+\infty$.

- En 0, on a par développement limité :

$$\begin{aligned} f(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) &= e^{-t}\left(\frac{1}{t-t^2/2+o(t^2)} - \frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{t}\left(\frac{1}{1-t/2+o(t)} - 1\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{t}\left(\frac{t}{2}+o(t)\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{2} + o(1) \end{aligned}$$

  On en déduit que f tend vers $1/2$ en 0, f est en particulier prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable.
- En $+\infty$, après mise au même dénominateur, on a :

$$f(t) = e^{-t}\frac{e^{-t}+t-1}{t(1-e^{-t})} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}\frac{t}{t} = e^{-t}$$

  et cette fonction donne lieu à une intégrale convergente (intégrale de référence du cours). Par théorème de comparaison, l'intégrale étudiée est bien convergente au voisinage de $+\infty$.

En conclusion, l'intégrale proposée est convergente.

2. 2.1. En appliquant la formule des probabilités composées et grâce aux données de l'énoncé, la probabilité cherchée est :

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\cdots\cap\overline{\mathrm{A}_n}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1})\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}}(\overline{\mathrm{A}_2})\cdots\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}\cap\cdots\overline{\mathrm{A}_{n-1}}}(\overline{\mathrm{A}_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2.2. De même, la probabilité cherchée s'écrit :

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\cdots\cap\overline{\mathrm{A}_{n-1}}\cap\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1})\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}}(\overline{\mathrm{A}_2})\cdots\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}\cap\cdots\overline{\mathrm{A}_{n-2}}}(\overline{\mathrm{A}_{n-1}})\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}\cap\cdots\overline{\mathrm{A}_{n-1}}}(\mathrm{A}_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2.3. On fixe $i \geqslant 1$. La famille $(\mathrm{A}_i, \overline{\mathrm{A}_i})$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales en version conditionnelle et grâce aux données de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} p_{i+1} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{i+1}) &= \mathrm{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{A}_{i+1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_i) + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_i}}(\mathrm{A}_{i+1})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_i}) \\ &= 0\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_i) + \frac{1}{2}(1-\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)) \\ &= \frac{1}{2}(1-p_i) \end{aligned}$$

2.4. La suite $(p_i)_{i\geqslant 1}$ vérifie donc la relation $p_{i+1} = -p_i/2 + 1/2$ pour $i \geqslant 1$. Cette suite est donc arithmético-géométrique et par la méthode classique de travail sur ce type de suite, on en déduit après calculs (on utilise $p_1 = 1/2$) :

$$\forall i \geqslant 1, \quad p_i = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{i-1}}{2^i}\right)$$

Planche B4 — Mines – Télécom 2023

1. On définit la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz + (1-i)\overline{z} \end{array}$$

1.1. Donner une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

1.2. Montrer que f est linéaire et donner sa matrice dans la base précédente.

1.3. Justifier que f est diagonalisable.

1.4. Déterminer la nature de f.

2. Pour $\alpha \geqslant 0$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ si $n \geqslant 1$.

Discuter selon α de la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{S_n}$.

SOLUTION

1. **1.1.** La famille $\mathscr{B} = (1, i)$ est bien libre et de cardinal 2, c'est donc une base du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1.2. La linéarité de f est triviale, et on obtient $f(1) = 1$ et $f(i) = -2 - i$, ce qui donne :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

1.3. On travaille sur la matrice M de l'endormorphisme f dans la base $\mathscr{B}$. Cette dernière étant triangulaire supérieure, on a directement $\mathrm{sp}(M) = \{-1, 1\}$. M admet donc deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

1.4. Par la question précédente, on peut écrire :

$$M = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $M^2 = PD^2P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$ (ce que l'on aurait pu vérifier directement par le calcul d'ailleurs). On obtient donc que f est une symétrie par rapport à la droite $E_1(f)$ (espace propre de f associé à 1) parallèlement à la droite $E_{-1}(f)$ (espace propre de f associé à -1).

2. **2.1.** La fonction $t \mapsto t^{\alpha}$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire, par comparaison série – intégrale :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \int_{k-1}^{k} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant k^{\alpha} \leqslant \int_{k}^{k+1} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t$$

En sommant de $k = 1$ à $n \geqslant 1$, on obtient par relation de Chasles :

$$\int_{0}^{n} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_{1}^{n+1} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Après calculs des intégrales aux extrémités, cela donne :

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leqslant S_n \leqslant \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}$$

Les deux extrémités étant équivalentes à $n^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit par encadrement le résultat suivant :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Cela donne par inverse :

$$\frac{1}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$

Le terme général qui nous intéresse est donc équivalent à un terme général d'une série de Riemann (à une constante près). Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} 1/S_n$ converge si et seulement si $\alpha + 1 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 0$.

PLANCHE B5 — MINES – TÉLÉCOM 2023

1. Pour tout réel x, on pose, sous réserve d'existence :

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

1.1. Donner le domaine de définition D de f.

1.2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur D.

1.3. Justifier que f est solution d'une équation différentielle homogène d'ordre 1 sur D.

1.4. En déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.
On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

2. On pose, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} c_1 & b & \cdots & \cdots & b \\ a & c_2 & b & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & \cdots & a & c_n \end{pmatrix}$$

2.1. Si $\mathrm{J}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1, que peut-on dire de l'application f qui à $x\in\mathbb{R}$ associe $\det(\mathrm{M}+x\mathrm{J})$?

2.2. Si $a\neq b$, calculer $\det(\mathrm{M})$.

Solution

1. 1.1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose $g(t,x)=e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $t\geqslant 0$. La fonction $t\mapsto g(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et il suffit de prouver l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ pour conclure. On a $\left|g(t,x)\right|\leqslant e^{-t^2}$ et $t^2e^{-t^2}$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissance comparées. Ainsi, par théorème de comparaison et critère de Riemann, l'intégrale est bien convergente au voisinage de $+\infty$. Finalement, f est définie sur $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

1.2. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On va appliquer le théorème de classe $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre.

- Pour $t\geqslant 0$, la fonction $x\mapsto g(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec $\partial^k g/\partial x^k(t,x)=t^ke^{-t^2}\cos(xt-k\pi/2)$ pour $x\in\mathbb{R}$;
- Pour $x\in\mathbb{R}$ et $p\in[\![1,k-1]\!]$, la fonction $t\mapsto\partial^p g/\partial x^p(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ en tenant le même type de raisonnement qu'à la question précédente;
- Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\partial^k g/\partial x^k(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- Pour $x\in\mathbb{R}$ et $t\geqslant 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(t,x)\right|\leqslant t^ke^{-t^2}$$

qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par critère de Riemann.

En conclusion, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et ce pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.3. Avec la question précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=-\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties généralisées (en intégrant $t\mapsto -te^{-t^2}$, il vient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\left[\frac{e^{-t^2}}{2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty}-\frac{x}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Le crochet généralisé étant nul, on obtient $f'+x/2f=0$.

1.4. Après résolution de l'équation différentielle homogène du premier ordre trouvée à la question précédente, on peut affirmer qu'il existe $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=\mathrm{K}e^{-x^2/4}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Avec la valeur donnée par l'énoncé pour $f(\mathrm{O})$, on conclue que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

2. 2.1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Au sein du déterminant de $\mathrm{M}+x\mathrm{J}$, on peut soustraire à chaque colonne d'indice plus grand que 2 la première puis développer le déterminant par rapport à la première colonne pour justifier que la fonction f est polynomiale de degré au plus 1.

2.2. Avec la question précédente, on peut écrire $f(x)=\alpha x+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme on a trivialement (déterminants de matrices triangulaires) $f(-a)=(c_1-a)\cdots(c_n-a)$ et $f(-b)=(c_1-b)\cdots(c_n-b)$, on peut facilement trouver α et β par résolution d'un système à deux équations et deux inconnues (on se sert du fait que $a\neq b$. Finalement, après calculs, on a :

$$\det(M) = f(0) = \beta = \frac{b\prod_{i=1}^{n}(c_i - a) - a\prod_{i=1}^{n}(c_i - b)}{b-a}$$

Planche B6 — Mines – Télécom 2022

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que :

$$\frac{\operatorname{Tr}(A)^2}{\operatorname{Tr}(A^2)} \leqslant \operatorname{rg}(A)$$

2. On se donne $u_0 \in]2, +\infty[$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - 2)$.

Solution

1. Grâce au théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A, on peut donc écrire $P^{-1}AP = D$ où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0 \ldots, 0)$. On sait que A et D sont semblables et on peut facilement montrer que A^2 et D^2 le sont puisque $P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = D^2$. Deux matrices semblables ayant même trace, il vient grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\operatorname{Tr}(A)^2 = \operatorname{Tr}(D)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r}1\cdot\lambda_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r}1\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\right) = r\operatorname{Tr}(D^2) = r\operatorname{Tr}(A^2)$$

Enfin, deux matrices semblables ayant même rang et grâce à la définition des $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$, on remarque que $r = \operatorname{rg}(D) = \operatorname{rg}(A)$, ce qui permet de conclure par division par $\operatorname{Tr}(A^2)$, ce nombre n'étant pas nul puisque l'un au moins des $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est non nul sans quoi la matrice A serait diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre et serait donc nulle.

2. On est en présence d'une suite récurrente. En notant $I =]2, +\infty[$, on prouve facilement par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Après étude classique de $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ et $g : x \mapsto f(x) - x$ sur I, on trouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 2 et qu'elle converge donc vers l'unique point fixe f sur I, à savoir 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce au théorème des accroissement finis appliqué à la fonction f sur $[2, u_n]$, il existe $c \in]2, u_n[$ tel que $f(u_n) - f(2) = f'(c)(u_n - 2)$. On en déduit :

$$|u_{n+1} - 2| = \left|f(u_n) - f(2)\right| = \left|f'(c)(u_n - 2)\right| = \frac{1}{2\sqrt{c+2}}|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 2|$$

où la dernière inégalité découle de $c \geqslant 2$. On en déduit immédiatement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 2| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0 - 2|$$

Finalement, par comparaison à une série géométrique convergente de raison $1/4$, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - 2)$ converge absolument et donc converge.

Planche B7 — Mines – Télécom 2022

1. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, là où cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^x}\,dt$$

1.1. Donner l'ensemble de définition D de la fonction F.

1.2. Montrer que F est continue sur D.

1.3. Déterminer, si elles existent, les limites de F aux bornes de son domaine de définition.

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 - M + I_n = 0$ et $M^T M = MM^T$. On pose $\Omega = M^T M$.

2.1. Montrer que $M^3 = -I_n$.

2.2. Prouver que $\Omega^3 = I_n$.

2.3. Démontrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Solution

1. 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto (t \ln t)/(1+t^2)^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (après prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ par croissances comparées). La convergence de l'intégrale définissant $F(x)$ dépendra donc de l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$, f est de signe constant et on a l'équivalent :

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{2x-1}}$$

- Si $2x - 1 > 1$, c'est-à-dire si $x > 1$, on peut justifier l'intégrabilité en $+\infty$ de cette fonction à l'aide d'un critère de Riemann (multiplier par t^x).
- Si $2x - 1 = 1$, c'est-à-dire si $x = 1$, cette fonction n'est pas intégrable en $+\infty$ puisque minorée par $t \mapsto 1/t$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$.
- Si $2x - 1 < 1$, même conclusion, cette fonction n'est pas intégrable puisque minorée par $t \mapsto 1/t$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$.

En conclusion, par théorème de comparaison, l'intégrale $F(x)$ existe si et seulement $x \in]1, +\infty[= D$.

1.2. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Les hypothèses simples se vérifient toutes facilement et pour l'hypothèse de domination, on écrit :

$$\forall x \in [a, b] \subset D, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{t \ln t}{(1+t^2)^x} \right| \leqslant \frac{t\,|\ln t|}{(1+t^2)^a}$$

et on remarque que cette fonction est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente avec $x = a$.

1.3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. On pose $g_n : t \mapsto (t \ln t)/(1+t^2)^{x_n}$. Les $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et la suite converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant n_0$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |g_n(t)| \leqslant \frac{t\,|\ln t|}{(1+t^2)^2}$$

qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En conclusion, par le théorème de convergence dominée, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\,dt = 0$$

Ceci valant pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, par caractérisation séquentielle, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

En 1, on remarque d'abord que, par croissance de l'intégrale, la fonction $G : x \mapsto \int_1^{+\infty} (t \ln t)/(1+t^2)^x\,dt$ est décroissante sur D. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, soit $\lim_{x\to1} G(x)$ existe, soit on a $\lim_{x\to1} G(x) = +\infty$. Si la limite existait, en la notant $\ell \in \mathbb{R}$, on écrit, par positivité et croissance de l'intégrale :

$$\forall A \geqslant 1, \quad \forall x > 1, \quad G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^x}\,dt \geqslant \int_1^{A} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^x}\,dt \geqslant \int_1^{A} \frac{t \ln t}{(1+t^2)}\,dt$$

En passant à la limite $x \to 1$, on obtient :

$$\forall A \geqslant 1, \quad \ell \geqslant \int_1^{A} \frac{t \ln t}{(1+t^2)}\,dt$$

ce qui n'est pas possible puisque le terme de droite tend vers $+\infty$ lorsque $A \to +\infty$ (l'intégrande n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ comme étudié en question **1.1**). Ainsi $\lim_{x\to1} G(x) = +\infty$. Comme la fonction $H : x \mapsto \int_0^1 (t \ln t)/(1+t^2)^x\,dt$ est continue en 1 (refaire le raisonnement de la question **1.2**), elle tend vers $H(1) \in \mathbb{R}$. Par somme, on conclut que $\lim_{x\to1} F(x) = +\infty$.

2. 2.1. On a directement en utilisant la relation de l'énoncé $M^3 = M \cdot M^2 = M \cdot (M - I_n) = M^2 - M = -I_n$.

2.2. Puisque M et M^T commutent, il vient $\Omega^3 = (M^T M)(M^T M)(M^T M) = (M^3)^T M^3 = (-I_n)^T \cdot (-I_n) = I_n$.

2.3. La matrice Ω est symétrique réelle et est donc diagonalisable par le théorème spectral. Avec la question précédente, le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de Ω de sorte que $\mathrm{sp}(\Omega) \subset \{1\}$. Ainsi Ω est diagonalisable avec 1 pour seule valeur propre donc $\Omega = I_n$. Cela donne $M^T M = I_n$, c'est-à-dire $M \in O_n(\mathbb{R})$.

PLANCHE B8 — MINES – TÉLÉCOM 2022

1. Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. On se donne $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie. On définit ensuite φ en posant :

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \quad \varphi(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$$

1.1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

1.2. Déterminer un polynôme annulateur de φ.

1.3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On pose, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ où cela a un sens :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n$$

2.1. Par l'absurde, montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

2.2. Donner le rayon de convergence de la série entière définissant f.

2.3. Exprimer f.

SOLUTION

1. 1.1. On a immédiatement que $\varphi(u) \in \mathscr{L}(E)$ pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et la linéarité se vérifie sans problème.

1.2. L'idée est de calculer les composées successives de φ jusqu'à trouver une relation entre ces dernières. Après calculs, on trouve que $\varphi^3(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ de sorte que $P(X) = X^3 - X$ convient.

1.3. Le polynôme P étant annulateur de φ et scindé à racines simples, φ est diagonalisable.

2. 2.1. Supposons que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Avec de la trigonométrie, on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)$$

Comme les termes $\sin((n+1)\theta)$ et $\sin(n\theta)$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par hypothèse, on obtient que $\sin(\theta)\cos(n\theta)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On peut alors écrire :

$$\sin(\theta)\cos(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies \sin^2(\theta)\cos^2(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies \sin^2(\theta)(1-\sin^2(n\theta)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Mais $\sin^2(\theta)(1-\sin^2(n\theta))$ tend vers $\sin^2(\theta)$ lorsque n tend vers $+\infty$ donc par unicité de la limite on doit avoir $\sin^2(\theta) = 0$, ce qui n'est pas possible puisque $\theta \in]0, \pi[$. D'où le résultat.

2.2. Comme la suite $(\sin(n\theta)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 d'après la question précédente, le rayon de convergence R recherché vérifie $R \leqslant 1$. De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(n\theta)| \leqslant 1$$

de sorte que par comparaison le rayon R est supérieur à celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$, lequel vaut 1. Ainsi $R \geqslant 1$ et donc $R = 1$.

2.3. On commence par se placer sur l'intervalle ouvert de convergence en prenant $x \in]-1, 1[$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} x^n\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{i\theta} x\right)^n\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right) \end{aligned}$$

L'échange entre la partie imaginaire et la somme infinie de la première égalité pourrait se justifier en revenant aux sommes partielles et en passant à la limite ; et la série géométrique en présence est bien convergente puisque la raison vérifie $\left|xe^{i\theta}\right| = |x| < 1$. Il reste enfin à calculer la partie imaginaire en question, ce qui se fait classiquement en multipliant par le conjugué en haut et en bas :

$$f(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-xe^{-i\theta}}{\left|1-xe^{i\theta}\right|^2}\right) = \frac{x\sin(\theta)}{\left|1-xe^{i\theta}\right|^2} = \frac{x\sin(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2}$$

PLANCHE B9 — MINES – TÉLÉCOM 2021

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

1.1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1.3. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. Déterminer la limite de f et f' en $+\infty$.

1.5. Pour $x > 0$, démontrer que :

$$f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

puis en déduire une expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.6. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

2.1. Montrer que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^{n-1})$ est libre.

2.2. Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec A. Prouver que B s'exprime comme combinaison linéaire de $\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}$.

PLANCHE B10 — MINES – TÉLÉCOM 2021

1. On étudie l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

Justifier que cette intégrale est bien définie puis la calculer à l'aide d'un changement de variable.

2. On s'intéresse à l'évolution d'une population de lapins sur une année. N est la variable aléatoire modélisant le nombre de naissances à l'année, elle suit une loi de Poisson de paramètre λ.
À chaque naissance, un mâle naît avec une probabilité $p \in \,]0,1[$. On note X et Y les variables aléatoires donnant les nombres de naissances sur une année de mâles et de femelles.

2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la loi de X conditionnellement à $(\mathrm{N} = n)$.

2.2. En déduire les lois de X et Y.

PLANCHE B11 — MINES – TÉLÉCOM 2021

1. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et lorsque cela a un sens :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^3)}\, \mathrm{d}t$$

1.1. Déterminer le domaine de définition D de f.

1.2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et donner f'.

2. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$. On pose $\mathrm{A} = (x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. Montrer que A est diagonalisable et que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est un projecteur orthogonal.

2.2. Déterminer ses valeurs propres.

Planche B12 — Mines – Télécom 2021

1. Soit $n \geqslant 1$.

1.1. Rappeler l'identité de Cauchy-Schwarz.

1.2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

1.3. Trouver les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles on a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

2. On pose pour x réel :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2.1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

2.2. Prouver que $|\sin u| \leqslant u$ pour $u \in \mathbb{R}_+$.

2.3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner F'.

2.4. Justifier que F est deux fois dérivable et donner F''.

2.5. En déduire F.

Planche B13 — Mines – Télécom 2021

1. On pose pour x réel et k entier :

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_k = \int_0^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t$$

1.1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2. Calculer F' sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer le signe de F.

1.3. Montrer que F admet une limite finie en 0^+.

1.4. Justifier que I_k est bien définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et la calculer.

1.5. Exprimer F(0) comme la somme d'une série.

2. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec A symétrique dont les valeurs propres sont positives.
Montrer que $\mathrm{AB} + \mathrm{BA} = 0$ si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0$.

Planche B14 — Mines – Télécom 2019

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+n^2x^2)}\,\mathrm{d}x$$

1.1. Justifier l'existence de I_n.

1.2. Trouver la limite de I_n.

1.3. Trouver un équivalent simple de I_n.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont nuls sauf les $(m_{i,i-1})_{2\leqslant i\leqslant n}$ qui valent 1 et les $(m_{i,n})_{1\leqslant i\leqslant n}$ qui valent -1.

2.1. Trouver les valeurs propres de M.

2.2. M est-elle diagonalisable ?

Solution

1. 1.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x(1+n^2x^2)}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est équivalente en 0 à 1 et comme $x \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1]$, f_n est intégrable sur $]0,1]$. Pour $x \geqslant 1$, on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2x^2}$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par linéarité, $x \mapsto \frac{1}{n^2x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et par comparaison f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$. I_n existe donc.

1.2. On fait le changement de variable $u = nx$. $x \mapsto nx$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{u}{n}\right)}{u(1+u^2)}du$. On applique alors le théorème de convergence dominée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : u \mapsto \frac{\sin\left(\frac{u}{n}\right)}{u(1+u^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (g_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|g_n(u)| \leqslant \frac{1}{n(1+u^2)} \leqslant \frac{1}{1+u^2}$$

et $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (équivalent à $u \mapsto 1$ en 0 et à $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ en $+\infty$). On conclut donc par le théorème de convergence dominée que I_n converge vers 0.

1.3. On a $n\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{u}{n}\right)}{\frac{u}{n}(1+u^2)}du$. On applique à nouveau le théorème de convergence dominée, comme $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$, on trouve directement comme fonction de domination $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$. On trouve alors $n\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}$ en calculant cette intégrale par primitivation de $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ avec Arctan. D'où $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

2. 2.1. On trouve, en développant suivant la première ligne que $\chi_{\mathrm{M}_{n+1}} = \mathrm{X}\chi_{\mathrm{M}_n} + 1$. On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\chi_{\mathrm{M}_n} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$.

1 n'est pas racine de χ_{M_n} et pour $z \neq 1$, on a $\chi_{\mathrm{M}_n}(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ et donc les racines de χ_{M_n} sont les racines $n+1$-ièmes de l'unité, excepté 1.

2.2. Les racines de χ_{M_n} sont toutes simples, χ_{M_n} est donc scindé à racines simples, M_n est diagonalisable.

Planche B15 — Mines – Télécom 2019

1. On pose, pour tout réel x où l'intégrale est bien définie :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

1.1. Déterminer le domaine de définition D de F.

1.2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D.

1.3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.

2. On étudie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

À quelles conditions A est-elle diagonalisable ?

Solution

1. 1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x > 0$, $\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$, puis sur $[0, 1]$ par continuité. Donc $F(x)$ est définie.
Si $x \leqslant 0$, $\frac{1}{x} = O\left(f_x(t)\right)$ et donc f_x n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (sinon, $t \mapsto \frac{1}{x}$ le serait) et comme f_x est positive, $\int_1^{+\infty} f_x$ diverge : $F(x)$ n'est pas définie.
Finalement, $D = \mathbb{R}_+^*$.

1.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall l \in [\![1, k]\!]$, $t \mapsto \frac{(-t)^l e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [a, b]$, soit $t \in \mathbb{R}_+, l \in [\![1, k]\!]$,

$$\left| \frac{(-t)^l e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}} \right| \leqslant \frac{t^l e^{-ta}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$t \mapsto \frac{t^l e^{-ta}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et continue sur $[0, 1]$.
Par le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, F est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et donc F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite : soit (x_n) une suite de réels strictement positifs divergeant vers $+\infty$. On étudie la limite de $(F(x_n))$ en lui appliquant le théorème de convergence dominée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{1+t^2}}$.
Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(f_n) converge simplement vers la fonction $h : t \mapsto 0$ pour $t > 0$ et 1 si $t = 0$. h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
(x_n) divergeant vers $+\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel $x_n \geqslant 1$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}$, qui ne dépend pas de n et qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On peut appliquer le théorème de convergence dominée et $(F(x_n))$ converge vers $\int_0^{+\infty} h = 0$.
Finalement, $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $(X-1)^2(X-2)^2$ et donc A est diagonalisable si et seulement si les deux sous-espaces propres sont de dimension 2, i.e. si et seulement si les matrices $A - I_4$ et $A - 2I_4$ sont de rang 2 (théorème du rang).
Or $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux dernières colonnes sont linéairement indépendantes, donc le rang vaut au moins 2 et le rang de A vaut 2 si et seulement si la deuxième colonne est combinaison linéaire des deux dernières, ce qui vrai uniquement dans le cas où $a = 0$.
Pour $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en regardant les lignes, elle est de rang 2 si et seulement si $f = 0$.
Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$ et $f = 0$.

Planche B16 — Mines – Télécom 2019

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(s) = ae^{1+s^2}$.

1.1. Montrer que f est développable en série entière et donner le rayon de convergence de son développement.

1.2. Trouver a pour que f soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1.3. Donner la loi de X et l'espérance de X.

2. On introduit la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner le rang de D, son image, son noyau. La matrice D est-elle diagonalisable ?

Solution

1. **1.1.** Pour $s \in \mathbb{R}$, on a

$$f(s) = ae \times e^{s^2} = ae \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ae}{n!} s^{2n}.$$

f est bien développable en série entière et l'écriture précédente étant valable pour tout $s \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

1.2. Si f est une fonction génératrice, on doit avoir, $f(1) = 1$, d'où $ae^2 = 1$ et finalement, $a = e^{-2}$. Réciproquement, si on suppose que $a = e^{-2}$, les coefficients du développement en série entière de f sont positifs, leur somme fait 1, donc f est bien une fonction génératrice.

1.3. X est à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels pairs. Et par définition, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = 2n) = \frac{1}{en!}.$$

Comme f est dérivable en 1, X possède une espérance et $E(X) = f'(1) = 2e^{-2}e^2 = 2$.

2. On suppose n supérieur ou égal à 3. Le rang de D est 2 (on regarde les lignes), son image est le plan engendré par $e_1 + e_n$ et $e_2 + \cdots + e_{n-1}$.
Par le théorème du rang, le noyau de D est de dimension $n-2$ et est engendré par
$(e_1 - e_2 - e_n, e_1 - e_3 - e_n, \ldots, e_1 - e_{n-1} - e_n)$, où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
0 est donc valeur propre de D et son sous-espace propre est de dimension $n-2$.
On pose $u = e_1 + e_n$ et $v = e_2 + \cdots + e_{n-1}$. (u, v) engendre d'image de D. Cette image est stable par D et, en notant d l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à D, $d(u) = u + 2v$ et $d(v) = (n-2)v$. La matrice représentative de d restreint à l'image de d est $\begin{pmatrix} 1 & n-2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour polynôme caractéristique est $X^2 - X - 2(n-2)$ dont le discriminant est strictement positif, donc il possède deux racines réelles distinctes (pour $n = 5$, ces racines sont -2 et 3). Ces deux racines sont des valeurs propres de D, distinctes et non nulles. Leurs sous-espaces propres sont de dimension 1 et donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n =$ D est diagonalisable.

Planche B17 — Mines – Télécom 2019

1. On introduit la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$$

1.1. En utilisant la parité de f, montrer que f est intégrable sur $]-1, 1[$.

1.2. Donner le développement en série entière de $g : t \mapsto \ln(1-t) - \ln(1+t)$ sur $]-1, 1[$.

1.3. Calculer $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$d_n = \frac{1! + \cdots + n!}{n!}$$

2.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre d_{n+1} et d_n.

2.2. Montrer que $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2.

2.3. En déduire la convergence de $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

2.4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} d_n/n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Solution

1. 1.1. f est paire. Il suffit donc de montrer que f est intégrable sur $[0,1[$. Or, f est continue sur $[0,1[$. Par ailleurs, f est équivalent en 1 à $t \mapsto \ln(1-t)$. Par changement de variable $t \mapsto 1-t$, on se ramène à l'intégrabilité de $x \mapsto \ln(x)$ en 0, ce qui est connu.

1.2. Pour $t \in]-1,1[$, on a $g(t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} = -2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

1.3. f est donc développable en série entière sur $]-1,1[$ et pour $t \in]-1,1[$, on a

$$f(t) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}.$$

On utilise alors la parité de f et le théorème d'interversion somme-intégrale.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto -2\frac{t^{2n}}{2n+1}$.
Chaque f_n est continue et intégrable sur $[0,1[$ (car prolongeable par continuité à $[0,1]$).
$\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers f, continue sur $[0,1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 |f_n|$. On a $u_n = 2\frac{1}{(2n+1)^2}$. $\sum u_n$ converge.
Par le théorème d'interversion somme intégrale,

$$\int_0^1 f(t)dt = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et donc, par parité,

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = -4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En utilisant, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et en séparant les termes pairs et ceux impairs, on trouve $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et donc

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = -\frac{\pi^2}{2}.$$

2. 2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve $d_{n+1} = \frac{d_n}{n+1} + 1$.

2.2. On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $d_n \leqslant 2$ et comme c'est vrai pour $n = 0$, on a le résultat.

2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} - 1 = \frac{d_n}{n+1}$ et donc $|d_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{n+1}$ ((d_n) est clairement à valeurs positives). Comme $\frac{2}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, par domination (d_{n+1}) converge vers 1 et par décalage, (d_n) converge vers 1.

2.4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\frac{d_n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ et donc la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Planche B18 — Mines – Télécom 2019

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A(A - I_n)^2 = 0$, $A(A - I_n) \neq 0$ et $(A - I_n)^2 \neq 0$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On définit une fonction f en posant, là où cela a un sens :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}$$

2.1. Trouver le domaine de définition D de f.

2.2. La fonction f est-elle continue sur D ?

2.3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur D ?

Solution

1. $X(X-1)^2$ annule A, donc le spectre de A est inclus dans $\{0,1\}$. $A - I_n$ n'est pas inversible, sinon, $A(A-I_n)=0$ et A n'est pas inversible, sinon, $(A-I_n)^2 = 0$. Donc 0 et 1 sont valeurs propres de A. Les valeurs propres de A sont donc exactement 0 et 1. Si A était diagonalisable, $A(A-I_n)=0$, ce qui est faux, donc A n'est pas diagonalisable.

2. 2.1. Si $x > 0$, $\frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Si $x \leqslant 0$, $\frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^3}$. Or ce dernier terme est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$, donc c'est bien le terme général d'une série convergente. On a donc la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3}$ sur $D=\mathbb{R}$.

2.2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3}$. Pour $x \leqslant 0$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\ln(n+1)}{n^3}$, donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{\ln(n+1)}{n^3}$, le dernier terme est bien le terme général d'une série convergente par ce qui précède. Par comparaison, $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur D et comme chaque f_n est continue sur D, f est continue sur D par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. Sur $\mathbb{R}_+$, on prouve la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ en écrivant :

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3}\right| \leqslant \frac{\ln(n+e^{nb})}{n^3}$$

qui est le terme général d'une série convergente d'après la question **1**.

2.3. Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Pour $x \in D$, pour $n \in \mathbb{N}*$,

$$f_n'(x) = \frac{ne^{nx}}{n^3(n+e^{nx})} = \frac{e^{nx}}{n^2(n+e^{nx})} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

$\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur D. Par le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

Planche B19 — Mines – Télécom 2019

1. On définit une fonction F en posant, là où cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x}\,dt$$

1.1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1) - \frac{\ln(x)^2}{2}$$

2. On définit la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en imposant $a_{i,j} = 4$ si $i = j$ et 1 sinon pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que que A est diagonalisable et donner les éléments propres de A.

Solution

1. 1.1. Posons $f : (x,t) \mapsto \frac{\ln(t)}{t+x}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ car équivalent en 0 à $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x}$.
Pour $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln(t)}{(t+x)^2}$ est continue sur $]0,1]$.
Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour $x \in [a,b]$, pour $t \in]0,1]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{|\ln(t)|}{(t+a)^2}$$

et $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{(t+a)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ pour les mêmes raisons que précédemment. On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t+x)^2}\,dt = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{(t+x)^2}\,dt.$$

Pour $\varepsilon \in]0,1]$, on fait une intégration par parties et on trouve

$$-\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{(t+x)^2}\,dt = \frac{\varepsilon\ln(\varepsilon)}{\varepsilon+x} + \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(\varepsilon+x)}{x}.$$

On peut alors passer à la limite lorsque ε tend vers 0 : on trouve, par croissances comparées,

$$F'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}.$$

1.2. Posons $G : x \mapsto F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\ln(x)^2}{2}$. G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$,

$$G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

G est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, or sa valeur en 1 est $2F(1)$. D'où la formule voulue.

2. A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable par le théorème spectral.
On calcule le polynôme caractéristique : après la sommation de toutes les colonnes dans la première, la mise en facteur de $(X-(n+3))$ et l'ajout à toutes les colonnes, à partir de la deuxième, de la première colonne, on trouve un déterminant triangulaire et donc

$$\chi_A = (X-(n+3))(X-3)^{n-1}.$$

On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On trouve que $e_1+\cdots+e_n$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $n+3$ et donc, par dimension, $E_{n+3}(A) = \mathrm{Vect}(e_1+\cdots+e_n)$.
$A - 3I_n$ est la matrice qui ne contient que des 1 et donc $e_1-e_2,\dots,e_1-e_n$ sont des vecteurs de son noyau et donc des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 3. Par dimension, $E_3(A) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2,\dots,e_1-e_n)$.

Planche B20 — Mines – Télécom 2019

1. 1.1. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Calculer en fonction des coefficients de A et de B, la quantité $\mathrm{Tr}({}^t\!AB)$.

1.2. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A\,|\,B) = \mathrm{Tr}({}^t\!AB)$ et on note $\|.\|$ sa norme associée.
Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $\|AB\|^2 \leqslant \|A\|^2\|B\|^2$.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \mathrm{Tr}(A^n)$.

2.1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.

2.2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre t_{n+3}, t_{n+2}, t_{n+1} et t_n.

2.4. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} t_n x^n$?

Solution

1. 1.1. Si on note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On trouve

$$\mathrm{Tr}({}^t\!AB) = \sum_{k=1}^n ({}^t\!AB)_{k,k} = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n ({}^t\!A)_{k,l}B_{l,k} = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{l,k}b_{l,k}.$$

1.2. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\|AB\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(AB)_{l,k}^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{l,i}b_{i,k}\right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique,

$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{l,i}^2 \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}^2\right) \leqslant \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{l,i}^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,k}^2 \leqslant \|A\|^2\|B\|^2.$$

2. 2.1. On trouve $\mathrm{Ker}(A-2I_3) = \mathrm{Vect}((1,0,-2)$.

2.2. On trouve

$$\chi_A = X^3 - 8X^2 + 14X - 4 = (X-2)(X^2-6X+2) = (X-2)(X-3-\sqrt{7})(X-3+\sqrt{7}).$$

Comme il est scindé à racines simples, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2.3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A est aussi un polynôme annulateur et donc $A^3 - 8A^2 + 14A - 4I_3 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{n+3} - 8A^{n+2} + 14A^{n+1} - 4A^n = 0.$$

La trace étant linéaire, on trouve

$$t_{n+3} - 8t_{n+2} + 14t_{n+1} - 4t_n = 0.$$

2.4. A est semblable à la matrice diagonale D comportant 2, $3+\sqrt{7}$ et $3-\sqrt{7}$ sur la diagonale. Pour $n \in \mathbb{N}$, A^n est semblable à D^n et donc

$$t_n = 2^n + (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n.$$

Or $3-\sqrt{7} \in]0,1[$, donc $(3-\sqrt{7})^n$ converge vers 0.
$3+\sqrt{7} > 2$ donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (3+\sqrt{7})^n$. On en déduit donc que $R = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

Planche B21 — Mines – Télécom 2019

1. Soit E un espace vectoriel dont on note Id l'identité. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 5u - 6\,\mathrm{Id} = 0$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 6\mathrm{Id})$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall t \geqslant 0, \quad f_n(t) = \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$$

2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2.2. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution

1. $P = X^2 - 5X - 6 = (X-6)(X+1)$ annule u. Comme u est scindé à racines simples, u est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{-1,6\}$.
Ou bien le spectre de u est réduit à $\{-1\}$. Alors, u étant diagonalisable, $u = -\,\mathrm{Id}$ et donc $\mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}) = E$ et $\mathrm{Ker}(u-6\mathrm{Id}) = \{0\}$ et la relation demandée est vraie.
On procède de même si le spectre de u est réduit à $\{6\}$.
Si le spectre de u est exactement la paire $\{-1,6\}$, on sait que $E = E_{-1}(u) \oplus E_6(u)$ puisque u est diagonalisable et donc la relation voulue est vraie.

2. 2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc f_n est intégrable sur $[0,1]$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement elle l'est sur $\mathbb{R}_+$.

2.2. On applique le théorème de convergence dominée.
Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto \begin{vmatrix} \frac{1}{1+t^2} & \text{si} & t \in [0,1[\\ \frac{e}{2e+1} & \text{si} & \text{t=1} \\ 0 & \text{si} & t > 1 \end{vmatrix}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par le théorème de convergence dominée, (u_n) converge et sa limite est

$$\int_0^{+\infty} f = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Planche B22 — Mines – Télécom 2019

1. On introduit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1. Déterminer les valeurs propres de A.

1.2. Déterminer les sous-espaces propres associés. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1.3. Montrer que A est semblable à la matrice B suivante :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Déterminer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \,\mathrm{d}x$$

2.1. Étudier la monotonie et la convergence de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

2.3. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n$.

2.4. En déduire la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Solution

1. 1.1. On calcule le polynôme caractéristique et on trouve $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^3$. Donc le spectre de A est $\{1\}$.

1.2. $\mathrm{A} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc par le théorème du rang, son noyau est de dimension 1. Or $\varepsilon_1 = (1,0,1)$ est dans ce noyau, d'où $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$. A n'est pas diagonalisable, sinon la somme des dimensions des sous-espaces propres devrait valoir 3 or on n'a que 1.

1.3. On cherche ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1$. On trouve $(x, -1, 1+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit $\varepsilon_2 = (0,-1,1)$.
On cherche ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$. On trouve $(x, 0, 1+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit $\varepsilon_3 = (0,0,1)$.
Vérifions que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de$\mathbb{R}^3$. Or sa matrice représentative dans la base canonique est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est clairement $-1 \neq 0$, donc $\mathscr{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et par construction, la matrice représentative de f dans cette nouvelle base est B : A et B sont semblables.

1.4. $B = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, I_3 commute avec N, on peut donc calculer B^n à l'aide de la formule du binôme. Il vient, pour $n \geqslant 2$

$$B^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Comme $B = P^{-1}AP$, $A = PBP^{-1}$ et par récurrence immédiate, $A^n = PB^nP^{-1}$.

Or $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -n^2+n+2 & n^2-3n & n^2-n \\ 2n & 2-2n & -2n \\ -n^2-n & n^2-n & n^2+n+2 \end{pmatrix}.$$

2. 2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}(x-1)dx \leqslant 0$ par croissance de l'intégrale.
(I_n) est donc décroissante.
Comme elle est à valeurs positives, (I_n) converge.

2.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx \leqslant \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, (I_n) converge vers 0.

2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}(x+1)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(I_k + I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{k-1}.$$

Il vient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} I_k.$$

Il reste $S_n = (-1)^{n+1} I_n + I_0 = (-1)^n I_n + \ln(2)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Planche B23 — Mines – Télécom 2017

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On se donne $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1.1. Montrer que f n'est pas injective.

1.2. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
Montrer que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1.3. Écrire la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}$.

1.4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. 2.1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

2.2. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-t^n}{\sqrt{1-t}} \, dt.$$

Solution

1. 1.1. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. On pose $y = f^{n-1}(x_0)$. Alors $f(y) = 0$ et $y \neq 0$, donc f n'est pas injective.

1.2. Il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre puisqu'elle contient n vecteurs et E est de dimension n.
Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0 \quad (1).$$

Alors on montre par récurrence sur $j \in [\![0, n-1]\!]$ l'hypothèse (H_j) : $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, j]\!]$.
Pour l'initialisation, on applique f^{n-1} à la relation (1). Il reste $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0$ et comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$.
Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$ tel que (H_j) soit vraie. Montrons (H_{j+1}). (1) s'écrit alors

$$\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$$

et en appliquant f^{n-2-j} à cette relation, il ne reste que le premier terme $\lambda_{j+1} f^{n-1}(x_0) = 0$. Comme précédemment, on en déduit que $\lambda_{j+1} = 0$. On a bien prouvé (H_{j+1}).

1.3. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4. Notons A la matrice obtenue. Son polynôme caractéristique est X^n et donc A possède une seule valeur propre : 0. Si f était diagonalisable, A le serait aussi et donc serait semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur sa diagonale et donc $A = 0$: contradiction. Donc f n'est pas diagonalisable.

2. 2.1.

2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1-t^n}{\sqrt{1-t}}$.
Chaque f_n est continue sur $[0,1[$.
(f_n) converge simplement vers $f : [0,1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, fonction continue sur $[0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1[$, on a $f_n(t) \leqslant f(t)$. Et f est continue sur $[0,1[$, et intégrable sur $[0,1[$ par le changement de variable $u = 1-t$ (bijectif de $]0,1[$ sur $]0,1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$) qui ramène l'étude à l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$, qui est une fonction de référence.
On a alors

$$\int_0^1 \frac{1-t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^1 = 2$.

PLANCHE B24 — MINES – TÉLÉCOM 2017

1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\varphi(P)(X) = P(X+1)$.

1.1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.2. Exprimer la matrice M de φ dans la base canonique.

1.3. Exprimer M^{-1} si M est inversible.

2. On considère la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,dt$$

2.1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2.2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer F' et en déduire F.

2.3. Montrer que F est continue en 0. En déduire la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

SOLUTION

1. 1.1. Il faut d'abord remarquer que φ est linéaire et va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. La formule du binôme donne

$$\varphi(X^k j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$$

La matrice de φ dans la base canonique est donc

$$\mathrm{M} = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$$

en convenant que $\binom{j}{i}$ est nul si $i > j$.

1.2. M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont non nuls (égaux à 1). C'est donc une matrice inversible et φ est ainsi un isomorphisme. On a évidemment

$$\varphi^{-1}(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$$

Comme en question précédente, on en déduit que

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{Mat}(\varphi^{-1}) = \left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$$

2. 2.1. $f_x \ : \ t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1. Le seul problème d'existence de l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ est au voisinage de $+\infty$.
Si $x > 0$, on a $f_x(t) = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. C'est donc une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ et $\mathrm{F}(x)$ existe.
On se place dans le cas $x = 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_1^a \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Le terme entre crochets est de limite nulle quand $a \to +\infty$. $\frac{\cos(t)}{t^2} = \mathrm{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale du membre de droite admet donc une limite finie quand $a \to +\infty$ (fonction intégrable). Finalement, l'intégrale du membre de gauche admet aussi une limite finie quand $a \to +\infty$ et f_0 admet une intégrale au voisinage de $+\infty$ ce qui permet de conclure que $\mathrm{F}(0)$ existe.

2.2. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ t \mapsto f_x(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t > 0,\ x \mapsto f_x(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0,\ |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-at}$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a > 0$).

On en déduit que $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ et que

$$\forall x > 0,\ \mathrm{F}'(x) = -\int_0^\infty \sin(t)e^{-xt}\,dt = -\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty e^{(i-x)t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit qu'il existe une constante c telle que

$$\forall x > 0,\ \mathrm{F}(x) = c - \mathrm{Arctan}(x)$$

Comme $|\sin(t)/t| \leqslant 1$, on a $\forall x > 0,\ |\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On en déduit que $c = \pi/2$ et ainsi

$$\forall x > 0,\ \mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)$$

2.3. On a

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}(e^{-xt}-1)\,dt$$

Le changement de variable $u = xt$ (pour $x > 0$) donne

$$\forall x > 0,\ \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = \int_0^\infty \sin(\frac{u}{x})\psi(u)\,du \ \text{ avec } \ \psi(u) = \frac{e^{-u}-1}{u}$$

ψ (prolongée par la valeur -1 en 0) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (elle est même DSE). On effectue une intégration par parties en dérivant ψ et en primitivant $\sin(u/x)$ en $-x\cos(u/x)$. C'est licite car $\psi(u)\cos(u/x)$ admet une limite finie en 0 (qui vaut -1) et en $+\infty$ (qui est nulle). On obtient

$$\forall x > 0,\ \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = x + x\int_0^\infty \cos(u/x)\psi'(u)\,du$$

Remarquons que $\psi'(u) = \frac{1-e^{-u}-ue^{-u}}{u^2}$ est $O(1/u^2)$ au voisinage de $+\infty$ et continue sur $\mathbb{R}^+$ (on a vu que $\psi \in C^1(\mathbb{R})$; on peut aussi utiliser un DL pour voir que $\psi'(u) \to 1/2$ quand $u \to 0$). ψ' est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale du membre de droite est donc majorée en module par $\int_0^\infty |\psi'|$. Le membre de droite est de limite nulle quand $x \to 0$ et ainsi $F(x) - F(0) \to 0$ ce qui montre que F est continue en 0. Avec l'expression sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\, dt = F(0) = \frac{\pi}{2}$$

Planche B25 — Mines – Télécom 2017

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

- **1.1.** La matrice A est-elle inversible ?
- **1.2.** La matrice A est-elle diagonalisable ?
- **1.3.** Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{4^n(2n+3)}$$

- **2.1.** Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
- **2.2.** Calculer la somme.

Solution

1. 1.1. $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ annule A. Le spectre de A est ainsi inclus dans $\{1,2\}$. En particulier, 0 n'est pas valeur propre et A est inversible.

1.2. On a un polynôme annulateur scindé simple pour A et A est donc diagonalisable.

1.3. Effectuons la division euclidienne de X^k par $(X-1)(X-2)$. Elle s'écrit

$$X^k = (X-1)(X-2)Q_n + a_k X + b_k$$

Appliquant cette identité polynomiale en 1 et 2, on trouve $1 = a_k + b_k$ et $2^k = 2a_k + b_k$ et donc $a_k = 2^k - 1$, $b_k = 2 - 2^k$. Ainsi,

$$A^k = (2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_n$$

2. 2.1. $|u_n| \leqslant \frac{1}{4^n}$. Le majorant étant le terme général d'une série géométrique convergente, $\sum(u_n)$ converge absolument.

2.2. On sait que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

En utilisant ceci avec $x^2/4$ pour $x \in]-2,2[$ puis en multipliant par x^2, on obtient

$$\forall x \in]-2,2[,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{4^n} = \frac{4x^2}{4+x^2} = 4 - \frac{16}{x^2+4}$$

On primitive ces termes (en prenant la primitive nulle en 0). Comme on peut primitiver les séries entières terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient

$$\forall x \in]-2,2[,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{4^n(2n+3)} = 4x - 8\,\mathrm{Arctan}(\frac{x}{2})$$

Il reste à appliquer ceci en $x = 1$ pour conclure que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+3)} = 4 - 8\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$$

1. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

1.1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1.2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

1.3. Montrer que f est développable en série entière.

1.4. A l'aide de l'équation différentielle, exhiber le développement en série entière de f.

2. On définir une application φ sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = (X^2-1)P'' - XP' + P$$

2.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. La restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?

SOLUTION

1. 1.1. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \cos(x\sin(\theta))$ est continue sur $[0,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
$\forall \theta \in [0,\pi]$, $x \mapsto \cos(x\sin(\theta))$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée k-ième $x \mapsto \sin^k(\theta)\cos(x\sin(\theta) + k\pi/2)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \sin^k(\theta)\cos(x\sin(\theta) + k\pi/2)$ est continue sur $[0,\pi]$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in [0,\pi]$, $|\sin^k(\theta)\cos(x\sin(\theta) + k\pi/2)| \leqslant 1$ et la constante est intégrable sur le segment $[0,\pi]$.
f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}\ :\ x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^k(\theta)\cos(x\sin(\theta) + k\pi/2)\ d\theta$$

1.2. En particulier, pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} -\pi x f''(x) &= \int_0^{\pi} x\sin^2(\theta)\cos(x\sin(\theta))\ d\theta \\ &= x\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\ d\theta - \int_0^{\pi} x\cos(\theta)\cos(x\sin(\theta))\cos(\theta)\ d\theta \\ &= \pi x f(x) - \int_0^{\pi} x\cos(\theta)\cos(x\sin(\theta))\cos(\theta)\ d\theta \end{aligned}$$

Une intégration par parties indique que

$$\int_0^{\pi} x\cos(\theta)\cos(x\sin(\theta))\cos(\theta)\ d\theta = [\sin(x\sin(\theta))\cos(\theta)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)\ d\theta$$

On en déduit (avec l'expression de f') que

$$-xf''(x) = xf(x) + f'(x)$$

1.3. *On pourrait directement passer à la question suivante et remarquer que f est solution d'un problème de Cauchy puisque $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Il suffit alors de trouver une fonctions DSE solution du même problème de Cauchy et conclure par unicité. On peut aussi dissocier les questions, ce qui semble être demandé.*
En utilisant le DSE de la fonction cos (valable sur $\mathbb{R}$), on a

$$\pi f(x) = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^{2n}(\theta)}{(2n)!} x^{2n}\ d\theta$$

x étant fixé dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall \theta \in [0,\pi],\ \left|\frac{(-1)^n \sin^{2n}(\theta)}{(2n)!} x^{2n}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

La série de fonctions de θ sous l'intégrale est donc normalement convergente sur le SEGMENT $[0,\pi]$ (car $\sum \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ converge). On est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale :

$$\pi f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \frac{(-1)^n \sin^{2n}(\theta)}{(2n)!} \, d\theta \right) x^{2n}$$

f est ainsi DSE sur tout $\mathbb{R}$.

1.4. Posons $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(-1)^n \sin^{2n}(\theta)}{(2n)!} \, d\theta$. On a (on peut dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^{2n+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1) a_n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(2n+1) a_{n+1} x^{2n-1}$$

En injectant dans l'équation différentielle, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 4(n+1)^2 a_{n+1}) x^{2n+1} = 0$$

Par unicité des DSE, on en déduit que $\forall n,\ a_n + 4(n+1)^2 a_{n+1} = 0$ et donc $a_{n+1} = -\frac{a_n}{4(n+1)^2}$. Une récurrence donne

$$\forall n,\ a_n = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$$

On a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

2. 2.1. Φ est clairement linéaire. De plus

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi(X^k) = (k-1)^2 X^k - k(k-1) X^{k-2}$$

On en déduit que $\Phi(X^k) \in \mathbb{R}_k[X]$. Ainsi, $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

2.2. La question précédente montre que la matrice de Φ (ou plutôt de sa restriction) dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux qui valent $(k-1)^2$ pour $k = 0, 1, \dots, n$. Les valeurs propres de Φ sont ainsi

$$1, 0, 1, 4, 9, \dots, (n-1)^2$$

Toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1 sauf 1 qui est de multiplicité 2. Φ sera diagonalisable si le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 2.
Soit P un vecteur propre associé à la valeur propre 1 ; quitte à le multiplier par une constante, on peut supposer P unitaire. On a $\Phi(P) = P$ et donc $(X^2-1)P'' = XP'$. En notant d le degré de P et en regardant le coefficient de X^d, on voit que $d(d-1) = d$. Ainsi $d = 0$ ou $d = 2$. On a alors $P = X^2 + aX + b$ ou $P = 1$. En injectant dans l'équation, on voit que le premier cas est impossible. Ainsi, $E_1(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$ est de dimension 1 et Φ n'est pas diagonalisable.

Planche B27 — Mines – Télécom 2017

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On se donne $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On introduit alors U la matrice colonne de coefficients $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $M = UU^T$.

1.1. Donner la loi des variables rg(M) et Tr(M).

1.2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t + \cdots + t^n}}$$

2.1. Pour $n \geqslant 1$, justifier l'existence de u_n et calculer u_1.

2.2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $2/3$.

2.3. Montrer que $u_n - 2/3$ admet un équivalent de la forme K/n^α.

Solution

1. 1.1. Les colonnes de M sont $X_1U, \dots, X_nU$ et M est donc de rang $\leqslant 1$. Si $U \neq 0$ il existe i tel que $X_i \neq 0$ et $m_{i,i} = X_i^2 \neq 0$. Ainsi, M est de rang 1 sauf si $U = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}(M) = 0) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 0) = (1-p)^n \ \text{ et } \ \mathbb{P}(\mathrm{rg}(M) = 1) = 1-(1-p)^n$$

La trace de M est égale à la somme des X_i^2. Or, $X_i^2 = X_i$ et la trace de M est donc une somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramaètre p. On a donc

$$\mathrm{Tr}(M) \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$$

c'est à dire que

$$\forall k \in [|0,n|],\ \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

1.2. Si M est une matrice de projection, sa trace est égale à son rang (on le voit en se plaçant dans une base adaptée à $\mathrm{Ker}(M) \oplus \mathrm{Im}(M) = \mathbb{R}^n$). Soit $U = 0$ (cas d'un rang nul) soit $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{Tr}(M) = 1$ ce qui signifie que U est un vecteur de la base canonique (la trace ne peut valoir 1 que si tous les X_i sont nuls sauf 1).
Réciproquement, si U est nul, $M = 0$ est une matrice de projection. Si $U = e_i$ (vecteur de la base canonique) alors $M = E_{i,i}$ est une matrice de projection.
M est une matrice de projection si tous les X_i sont nuls ou si exactement un vaut 1. Les situations étant incompatibles, la probabilité de l'événement est

$$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

2. 2.1. $f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}$ est continue sur le segment $[0,1]$ et u_n existe donc (intégrale classique). On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \Big[2\sqrt{1+t}\Big]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

2.2. (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1[$ (on reconnaît sous la racine une somme géométrique) vers $t \mapsto \sqrt{1-t}$. De plus, $|f_n(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1[$ et le majorant est intégrable (continu sur le segment). On peut ainsi utiliser le théorème de convergence dominée et conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{1-t}\, dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2.3. On remarque que

$$\forall t \in [0,1[,\ f_n(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^{n+1}}}$$

On en déduit que

$$u_n - \frac{2}{3} = \int_0^1 \left(f_n(t) - \sqrt{1-t}\right) dt = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-t^{n+1}}}{\sqrt{1-t^{n+1}}} \sqrt{1-t}\, dt$$

On effectue alors le changement de variable $u = t^{n+1}$:

$$u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}} \sqrt{1-u^{\frac{1}{n+1}}}\, u^{-\frac{n}{n+1}}\, du$$

Posons alors

$$g_n(u) = \frac{1-\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}} \sqrt{(n+1)(1-u^{\frac{1}{n+1}})}\, u^{-\frac{n}{n+1}}$$

de sorte que

$$u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{(n+1)^{3/2}} \int_0^1 g_n(u)\, du$$

Les g_n sont des fonctions continues sur $]0,1[$ et on a

$$\forall u \in]0,1[, \lim_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{1-\sqrt{1-u}}{u\sqrt{1-u}}\sqrt{-\ln(u)} = g(u)$$

Comme $1-e^x \leqslant -x$ (convexité de l'exponentielle) et comme $u^{-n/(n+1)} \leqslant u^{-1}$ pour $u \in]0,1[$, on a

$$\forall n,\ \forall u \in]0,1[,\ |g_n(u)| \leqslant g(u)$$

On pourra donc utiliser le théorème de convergence dominée si on montre que g est intégrable sur $]0,1[$. Or, g est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1 (par la valeur 1 en utilisant $\ln(u) \sim_1 u-1$) et négligeable en 0 devant $1/\sqrt{u}$ (équivalente à $\sqrt{-\ln(u)}/2$ puisque $\sqrt{1-u} = 1-u/2+o_0(u)$). g est donc intégrable sur $]0,1[$. Ainsi

$$u_n - \frac{2}{3} \sim \frac{\mathrm{K}}{n^{3/2}} \text{ avec } \mathrm{K} = \int_0^1 g$$

L'équivalent est justifié car $\mathrm{K} > 0$, *c'est l'intégrable d'une fonction continue positive et non nulle.*

PLANCHE B28 — MINES – TÉLÉCOM 2017

1. Soit E un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension finie. On se donne $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1.1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f\circ f)$ équivaut à $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
On suppose dans la suite que cette propriété est vérifiée.

1.2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

1.3. Montrer qu'il existe une base où f est représentée par une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathrm{diag}(0,\mathrm{T})$ avec T une matrice triangulaire supérieure.

2. On fixe $a > 0$ un réel. Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = n^a x^2 e^{-nax}$$

2.1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On cherchera des intervalle où il y a convergence uniforme.

2.3. Étudier la suite de terme général $\int_1^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2.4. Étudier la suite de terme général $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2.5. Étudier la suite de terme général $\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

SOLUTION

1. 1.1. Supposons que $\mathrm{Ker}(f\circ f) = \mathrm{Ker}(f)$. Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$: $f(x) = 0$ et il existe y tel que $x = f(y)$. On a alors $f\circ f(y) = 0$ et donc $y \in \mathrm{Ker}(f\circ f)$. On en déduit avec l'hypothèse que $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $x = f(y) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
Supposons $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0\}$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f\circ f)$ est vraie de façon générale. Supposons $x \in \mathrm{Ker}(f\circ f))$. On a alors $f(x) \in \mathrm{Im}\cap\mathrm{Ker}(f)$ et donc, avec l'hypothèse, $f(x) = 0$. On a ainsi l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

1.2. Par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{E})$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe par hypothèse, ils sont alors supplémentaires par dimension.

1.3. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f) = \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f, dans cette base, f est représentée par $\mathrm{diag}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ où A, B sont les matrices des endomorphismes induits par f sur $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On a ainsi $\mathrm{A} = 0$. Il reste à voir qu'il est possible de choisir la base de $\mathrm{Im}(f)$ en sorte que B soit triangulaire ce qui est vrai car on travaille dans des $\mathbb{C}$-espaces où tous les endomorphismes sont trigonalisables.

2. 2.1. Iil y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle (croissances comparée)

2.2. On étudie f_n. On a $f_n'(x) = n^a e^{-nax}x(2-nax)$. f_n est croissante sur $[0, \frac{2}{na}]$ puis décroissante. Ainsi

$$\|f_n - 0\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = f_n\left(\frac{2}{na}\right) = \left(\frac{2}{ea}\right)^2 n^{a-2}$$

- Si $a \in]0,2[$ alors il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
- Si $a \geqslant 2$, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Si $x_0 > 0$ alors, pour n assez grand, $\|f_n\|_{\infty,[x_0,+\infty[} = |f_n(x_0)| \to 0$ et il y a convergence uniforme sur $[x_0,+\infty[$.

2.3. Il y a convergence uniforme sur le segment $[1,2]$ et on est dans le cas simple où l'on peut intervertir :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(t)\,dt = 0$$

2.4. Une double intégration par parties donne facilement

$$\int_0^1 x^2 e^{-ux}\,du = \frac{2-e^{-u}(2+2u+u^2)}{u^3}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \sim \frac{2}{a^3} n^{a-3}$$

Si $a > 3$, la suite est de limite infinie. Si $a = 3$, il y a convergence vers $\frac{2}{27}$. Si $a \in]0,3[$, il y a convergence vers 0.

2.5. Pour pouvoir intervertir limite et intégrale, il suffit de pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée. On a déjà convergence simple sur $[1,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle qui est continue. De plus,

$$\forall x \geqslant 1,\ |f_n(x)| = n^a e^{-nax/2} x^2 e^{-nax/2} \leqslant n^a e^{-na/2} x^2 e^{-ax/2}$$

$n^a e^{-na/2}$ est le terme général d'une suite de limite nulle et donc bornée. Notons M un majorant de cette suite (M ne dépend pas de x). On a

$$\forall x \geqslant 1,\ |f_n(x)| \leqslant \mathrm{M} x^2 e^{-ax/2}$$

Le majorant est continu sur $[1,+\infty[$ et dominé par $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$. Il est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{\infty} f_n(t)\,dt = 0$$

PLANCHE B29 — MINES – TÉLÉCOM 2017

1. Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. On se donne $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0$.

1.1. Montrer que f est inversible et exprimer f^{-1}.
1.2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id_E})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id_E})$ sont supplémentaires dans E.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction u_n définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On note S la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

2.1. Montrer que S est bien définie et dérivable sur $[0,1]$.
2.2. Calculer $\mathrm{S}'(1)$.

SOLUTION

1. 1.1. $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ annule f dans cet exercice :

$$(f - \mathrm{Id_E}) \circ (f - 2\mathrm{Id_E}) = (f - 2\mathrm{Id_E}) \circ (f - \mathrm{Id_E}) = 0$$

En particulier, comme le polynôme est scindé simple, f est diagonalisable et ses valeurs propres ne peuvent être que 1 et 2. 0 n'étant pas valeur propre, f est inversible. En composant par f^{-1} la relation de l'énoncé, on a

$$f^{-1} = \frac{1}{2}\left(3\mathrm{Id_E} - f\right)$$

1.2. Si $f(x)=x$ et $f(x)=2x$ alors $x=0$ et $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id_E})$ et $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id_E})$ sont en somme directe.
Soit $x\in\mathrm{E}$. On a $x=(f(x)-x)-(f(x)-2x)=(f-\mathrm{Id_E})(x)-(f-2\mathrm{Id_E})(x)$ qui est la somme d'un élément de $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id_E})$ et d'un élément de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id_E})$. La somme est ainsi égale à E.

2. 2.1. Pour tout $x\in[0,1]$, $u_n(x)\sim-\frac{x^2}{2n^2}$ est le terme général d'une série convergente. $\sum(u_n)$ converge simplement sur $[0,1]$.
$u_n\in\mathscr{C}^1([0,1])$ et $u_n' : x\mapsto-\frac{x}{n^2(1+x/n)}$. On remarque que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ |u_n'(x)|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

Ainsi $\|u_n'\|_{\infty,[0,1]}\leqslant\frac{1}{n^2}$ et $\sum(u_n')$ converge normalement sur $[0,1]$.
Le théorème de régularité pour les séries de fonctions donne $\mathrm{S}\in\mathrm{C}^1([0,1])$ et

$$\forall x\in[0,1],\ \mathrm{S}'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2(1+x/n)}$$

2.2. En particulier,

$$\mathrm{S}'(1)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=-1$$

On revient, pour le calcul, à des sommes partielles et on a un télescopage.

Planche B30 — Mines – Télécom 2017

1. Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2-\pi t}\,\mathrm{d}t$$

2. 2.1. Soient $\mathrm{B},\mathrm{C}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices semblables.
Montrer que pour tout $x\in\mathbb{C}$, les matrices $x\mathrm{I}_n-\mathrm{B}$ et $x\mathrm{I}_n-\mathrm{C}$ sont semblables.

2.2. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\mathrm{P_A}$. On se donne $x\in\mathbb{C}$ tel que x n'est pas valeur propre de A. Montrer que :

$$\operatorname{Tr}((x\mathrm{I}_n-\mathrm{A})^{-1})=\frac{\mathrm{P}_\mathrm{A}'(x)}{\mathrm{P_A}(x)}$$

Solution

1. $t\mapsto\frac{\sin(t)}{t^2-\pi t}$ est continue sur $]\pi,+\infty[$ et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (numérateur majoré en module par 1, dénominateur équivalent à t^2). Il reste à étudier le problème en π. Or,

$$\sin(\pi+x)=-\sin(x)\sim_0-x$$

et donc

$$\frac{\sin(t)}{t^2-\pi t}\sim_\pi\frac{\pi-t}{\pi(t-\pi)}\to-\pi$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en π. Elle est finalement intégrable sur $]\pi,+\infty[$ et son intégrale existe a fortiori.

2. 2.1. Par hypothèse, il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}=\mathrm{C}$. On a alors

$$\forall x\in\mathbb{C},\ \mathrm{P}^{-1}(x\mathrm{I}_n-\mathrm{B})\mathrm{P}=x\mathrm{I}_n-\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}=x\mathrm{I}_n-\mathrm{C}$$

ce qui montre que $x\mathrm{I}_n-\mathrm{B}$ et $x\mathrm{I}_n-\mathrm{C}$ sont semblables.

2.2. x n'étant pas valeur propre de A, $x\mathrm{I}_n-\mathrm{A}$ est inversible. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable et A est donc semblable à une matrice triangulaire T. Les éléments diagonaux $t_{i,i}$ sont les valeurs propres de A et donc différents de x. Avec la question précédente, A DETAILLER $(x\mathrm{I}_n-\mathrm{A})^{-1}$ et $(x\mathrm{I}_n-\mathrm{T})^{-1}$ sont semblables et on donc même trace. Comme $xI_n - T$ est triangulaire de coefficients diagonaux $x - t_{i,i}$, son inverse est aussi triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les $\frac{1}{x-t_{i,i}}$. On a donc

$$\mathrm{Tr}((xI_n - A)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - t_{i,i}}$$

P_A est le polynôme caractéristique de A et cette notion est invariante par similitude (comme le déterminant). On a donc

$$P_A = P_T = \prod_{i=1}^{n} (X - t_{i,i})$$

On en déduit que

$$P'_A = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq j} (X - t_{j,j})$$

et on a donc

$$\frac{P'_A}{P_A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - t_{i,i}}$$

On obtient la relation demandée en évaluant cette fraction rationnelle en x.

Planche B31 — Mines – Télécom 2017

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

1.1. Montrer que f est bien définie, impaire, que f est dérivable et exprimer sa dérivée.

1.2. Étudier le signe de f et de f'.

1.3. Donner la limite de f en $+\infty$.

1.4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On considère f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que f est diagonalisable ou nilpotent.

Solution

1. 1.1. $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (le terme sous la racine reste > 0) et sont intégrale existe sur tout segment. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. Le changement de variable linéaire $t = -t$ donne

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2+u^4}} = -f(x)$$

et f est donc impaire.
Comme l'application intégrée est continue, elle admet une primitive H et $f(x) = H(2x) - H(x)$. f est donc dérivable et

$$\forall x,\ f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^2+(4x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$$

1.2. Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) \geqslant 0$ comme intégrale s'une fonction positive avec les bornes dans le bon sens. Par imparité, f est négative sur $\mathbb{R}^-$.
En réduisant au même dénominateur et en multipliant par la quantité conjuguée, on voit que $f'(x)$ est du même signe que $3 - 12x^4$. Elle est positive sur $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ et négative ailleurs.

1.3. $h(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$ et h est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit qu'une primitive H de h admet une limite finie en $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (H(2x) - H(x)) = 0$$

1.4. On peut penser que $f(x)$ va être équivalent au voisinage de $+\infty$ à

$$h(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x}$$

Pour le prouver, il suffit de montrer que $f(x) - h(x)$ est négligeable devant $h(x)$ au voisinage de $+\infty$. On a

$$f(x) - h(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} - \frac{1}{t^2} \right) dt$$

Par inégalité des accroissements finis appliqué à $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ entre t^4 et $1+t^2+t^4$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} - \frac{1}{t^2} \right| \leqslant \frac{1+t^2}{2} \sup_{y \in [t^4, 1+t^2+t^4]} \frac{1}{y^{3/2}} \leqslant \frac{1+t^2}{2t^6}$$

Pour $t \geqslant 1$, le majorant est plus petit que $\frac{1}{t^3}$. On a donc

$$\forall x \geqslant 1,\ |f(x) - h(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^3} \leqslant \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = o(h(x))$$

On a donc prouvé que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

2. f étant de rang 1, son noyau est de dimension $n-1$. Dans une base obtenue en complétant une base du noyau, la matrice de f est du type

$$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}_{i,n}$$

Si $a_n = 0$ alors la diagonale de M est nulle. $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^n$ annule f et donc $f^n = 0$. f est nilpotent.
Sinon, a_n est une autre valeur propre de M. On a donc un sous-espace propre de dimension $n-1$ (le noyau) et un autre. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, le second sous-espace est de dimension 1. f est diagonalisable (la somme des dimension des sous-espaces propres vaut n).

Planche B32 — Mines – Télécom 2017

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction f_n sur $[0,1]$ en posant :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+nx)}$$

1.1. Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$.

1.2. Y-a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$?

2. Trouver toutes les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

1. 1.1. Soit $x \in [0,1]$.
Si $x = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et donc $\sum f_n(0)$ converge par le théorème spécial à certaines séries alternées.
Si $x \neq 0$. Pour $|f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$. Or $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par linéarité $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 x}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge. $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
On peut en fait vérifier que pour tout $x \in [0,1]$, $\sum f_n(x)$ satisfait les hypothèses du théorème spécial à certaines séries alternées et donc que pour $x \in [0,1]$, le reste de $\sum f_n(x)$ vérifie $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1+(n+1)x)} \leqslant \frac{1}{n+2}$. On a donc $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+2}$ et donc $(\|\mathrm{R}_n\|_\infty)$ converge vers 0 : $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a pour $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{1}{(n+1)(1+nx)}$ et donc $|f_n|$ est décroissante positive sur $[0,1]$: $\|f_n\|_\infty = |f_n(0)| = \frac{1}{n+1}$. Ce terme général est équivalent à celui de la série harmonique : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge : $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

2. A étant triangulaire inférieure, son polynôme caractéristique est $\chi_A = (X-3)(X_2)(X-1)$. Comme il est scindé à racines simples, A est diagonalisable. Son spectre est $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2,3\}$. Ses sous-espaces propres sont de dimension 1 car chaque valeur propre est simple. On a clairement $(0,0,1)$ qui est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 et $(0,1,0)$ qui est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Enfin, $(1,-5,2)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3. On a donc tous les sous-espaces propres de A : ce sont les droites vectoriels engendrées par chacun des trois vecteurs précédents. On pose donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a alors

$$M^2 = A \iff M^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}M^2P = D \iff (P^{-1}MP)^2 = D.$$

On pose donc $N = P^{-1}MP$,

$$M^2 = A \iff N^2 = D$$

. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = D$. Alors N commute avec D et donc N est diagonale (les sous-espaces propres de D, qui sont des droites vectorielles sont stables par N : les vecteurs propres de D sont donc aussi des vecteurs propres de N). On écrit alors $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. $N^2 = D$ donne $a^2 = 1$, $b^2 = 2$ et $c^2 = 3$. On a donc $a = \varepsilon_1$, $b = \varepsilon_2\sqrt{2}$ et $c = \varepsilon_3\sqrt{3}$ avec $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ poir $i = 1,2,3$. On a donc huit solutions possibles pour N. On vérifie immédiatement que ces huit matrices sont bien des solutions de $N^2 = D$. Notons les N_i pour $i = 1,\dots,8$. On a alors, avec ce qui précède, huit solutions M_i à l'équation $M^2 = A$, qui sont les PN_iP^{-1}.

PLANCHE B33 — MINES – TÉLÉCOM 2017

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}$$

1.1. Étudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
On note S la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. Quelle est la limite de S en $+\infty$?

1.2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

2. Soit E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie n. On se donne $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

2.1. Montrer que n est pair.

2.2. Montrer que pour $x \in E\setminus\{0\}$, $(x, f(x))$ est libre dans E.

2.3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans la quelle la matrice représentative de f est de la forme :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUTION

1. 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.
Si $x \neq 0$, alors $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par linéarité, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^2}$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = |f_n|$. Une étude des variations de g_n donne qu'elle est positive et maximale en n, son maximum étant $\frac{1}{2n}$. On a donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$ et la série harmonique étant divergente et $\frac{1}{2}$ étant non nul, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ diverge : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
On remarque, qu'à x fixé, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial à certaines séries alternées. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$ d'où $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$. $(\|\mathrm{R}_n\|_\infty)$ converge vers 0 : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
On applique le théorème d'interversion limite-somme.
Chaque f_n converge vers 0 en $+\infty$. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. On peut appliquer le théorème d'interversion limite-somme. On obtient alors $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.2. On applique le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.
Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = (-1)^n \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)}$. On a donc $|f_n'(x)| \leqslant \frac{n^2+x^2}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. On a alors $\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
On peut appliquer le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions : S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. 2.1. On a donc $f^2 = -\mathrm{I}d$. On prend le déterminant, $\det(f^2) = (-1)^n$, ou $(\det(f))^2 = (-1)^n$. Comme le carré d'un réel est toujours positif, $(-1)^n \geqslant 0$ et donc n est pair.

2.2. Soit $x \in \mathrm{E}$, $x \neq 0$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0$ (1). On applique f et on obtient $\lambda f(x) - \mu x = 0$ (2) et $\lambda(1) - \mu(2)$ donne $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0$ et comme $x \neq 0$, $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et donc $\lambda = \mu = 0$. La famille $(x, f(x))$ est bien libre.

2.3. On construit $\mathscr{B}$ par récurrence. On choisit $x \in \mathrm{E}$, $x \neq 0$ et $(e_1, e_2) = (x, f(x))$: c'est une famille libre de E, et le plan engendré par e_1 et e_2 est stable par f.
Si $n = 2$, on s'arrête là. Sinon, on peut trouver $y \in \mathrm{E}$, qui n'est pas dans le plan engendré par e_1 et e_2. On pose alors $e_3 = y$ et $e_4 = f(y)$. (e_3, e_4) est une famille libre de E, mais aussi (e_1, e_2, e_3, e_4). En effet, on a vu que e_3 n'est pas dans le plan vectoriel engendré par (e_1, e_2). Si $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ alors $-e_3 = f(e_4) = \lambda e_2 - \mu e_1 + \nu e_4$ et $(\nu\lambda - \mu)e_1 + (\lambda + \mu\nu)e_2 + (1 + \nu^2)e_3 = 0$ avec $1 + \nu^2 \neq 0$: contradiction.
Alors ou bien $n = 4$ ou bien on continue. E étant de dimension finie pair, le processus s'arrête bien. On obtient bien ainsi une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est celle demandée.

1. Soit E un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. On se donne $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ non diagonalisable.
   1.1. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'une des familles $(e_1, f(e_1))$ ou $((e_2, f(e_2))$ est libre.
   1.2. Donner une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :
$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}, \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2$$
   1.3. Démontrer que $a = -b^2/4$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :
$$f(x) = \int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^x}\right) - \frac{1}{t^x}\right) \mathrm{d}t.$$
   2.1. Déterminer le domaine de définition D de f.
   2.2. La fonction f est-elle continue sur D ?
   2.3. Calculer $f(1)$.

SOLUTION

1. 1.1. Supposons par l'absurde que les deux familles soient liées. Alors, e_1 et e_2 étant non nuls, il existe λ et μ deux complexes tels que $f(e_1) = \lambda e_1$ et $f(e_2) = \mu e_2$. Mais alors (e_1, e_2) est une base de vecteurs propres pour f : f est diagonalisable. On a une contradiction.

1.2. On note $(e, f(e))$ celle des deux qui est libre. C'est alors une base de E (E est de dimension 2). Dans cette base, la matrice représentative de f a bien la forme attendue.

1.3. On peut alors calculer le polynôme caractéristique de f. On trouve $\chi_f = \mathrm{X}^2 - b\mathrm{X} - a$. Il n'est pas scindé à racines simple, sinon, f serait diagonalisable. Mais comme il s'agit d'un polynôme à coefficients complexes, il est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss). Il est donc scindé avec une racine double. Son discriminant est nul. On a donc $\Delta = b^2 + 4a = 0$ et donc $a = -\frac{b^2}{4}$.

2. 2.1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $g : t \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^x}\right) - \frac{1}{t^x}$. g est continue sur $[1, +\infty[$ et à valeurs positives.
Si $x = 0$, alors $g = \frac{\pi}{2} - 1 \neq 0$ et donc $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ diverge.
Si $x \neq 0$, alors $\frac{1}{t^x}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Le développement limité de Arcsin à l'ordre 3 en 0 donne $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6t^{3x}}$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^{3x}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $3x > 1$ i.e. $x > \frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{6}$ est non nul, $t \mapsto \frac{1}{6t^{3x}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x > \frac{1}{3}$ et par comparaison, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x > \frac{1}{3}$. Comme g est positive, $f(x)$ est définie si et seulement si $x > \frac{1}{3}$. $\mathrm{D} =]\frac{1}{3}, +\infty[$.

2.2. A x fixé dans D, $t \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^x}\right) - \frac{1}{t^x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
A t fixé dans $[1, +\infty[$, $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^x}\right) - \frac{1}{t^x}$ est continue sur $]\frac{1}{3}, +\infty[$.
On étudie la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \mathrm{Arcsin}\, y - y$. Elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$. On trouve qu'elle est croissante et positive sur $[0,1]$.
Pour $[a,b] \subset]\frac{1}{3}, +\infty[$, pour $x \in [a,b]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a alors
$$\left|\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^x}\right) - \frac{1}{t^x}\right| \leqslant \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^a}\right) - \frac{1}{t^a}.$$
On pose donc $\varphi : t \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t^a}\right) - \frac{1}{t^a}$. Par ce qui précède, φ est continue et intégrable (car $a > \frac{1}{3}$) sur $[1, +\infty[$.
Par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, f est continue sur D.

2.3. $f(1) = \int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right) dt$.
On effectue le changement de variable $u = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)$ ($u \mapsto \frac{1}{\sin u}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et bijectif de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1, +\infty[$. On a alors
$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u - \sin u) \frac{\cos u}{\sin^2 u} du.$$
On effectue ensuite une intégration par parties, avec $u \mapsto u - \sin u$ et $u \mapsto -\frac{1}{\sin u}$, qui sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et leur produit a pour limite $1 - \frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ et 0 en 0. On a alors
$$f(1) = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos u}{\sin u} du.$$

On effectue alors le changement de variable $v = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$. $v \mapsto 2\mathrm{Arctan}(v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et bijectif de $]0,1]$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. On a alors

$$f(1) = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{2v}{1+v^2}\,dv = 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2.$$

Planche B35 — Mines – Télécom 2017

1. On définit une fonction f en posant, là où cela a un sens :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$$

1.1. Montrer que f est bien définie sur $]-1,1[$.

1.2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

1.3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1,1[$ et en déduire une expression de f.

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On définit la matrice M_n suivante :

$$\mathrm{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Montrer que M_n est diagonalisable.

2.2. Diagonaliser M_n.

Solution

1. 1.1. Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{x^n \sin(nx)}{n}\right| \leqslant |x|^n$. Or $\sum |x|^n$ converge car il s'agit d'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Par comparaison, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ converge absolument, donc converge. $f(x)$ est bien défini.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.
Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.
$\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ par la question précédente.
Soit $[a,b] \subset]-1,1[$. On pose $\mathrm{M} = \max(|a|,|b|)$. On a $0 \leqslant \mathrm{M} < 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in]-1,1[$, $f_n'(x) = x^{n-1}(\sin(nx) + x\cos(nx))$. On a donc, si $x \in [a,b]$, $|f_n'(x)| \leqslant (1+\mathrm{M})\mathrm{M}^{n-1}$. D'où $\|f_n'\|_\infty \leqslant (1+\mathrm{M})\mathrm{M}^{n-1}$. Or $\sum \mathrm{M}^{n-1}$ converge car il s'agit d'une série géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1. Par linéarité, $\sum (1+\mathrm{M})\mathrm{M}^{n-1}$ converge et par comparaison, $\sum_{n \geqslant 1} \|f_n'\|_\infty$ converge, i.e. $\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ de $]-1,1[$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

1.3. Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^{n-1}\sin(nx) + x^n \cos(nx)\right).$$

Chacune des séries converge, on peut donc séparer en

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx).$$

On note $\mathrm{S}_1(x)$ et $\mathrm{S}_2(x)$ la première et la deuxième somme respectivement. On a

$$\mathrm{S}_2(x) + ix\mathrm{S}_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (xe^{ix})^n = \frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}}.$$

Or,
$$\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}} = \frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{|1-xe^{ix}|^2} = \frac{x\cos x + ix\sin x - x^2}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2}.$$
Finalement, $S_2(x) = \frac{x\cos x - x^2}{1-2x\cos x+x^2}$ et $xS_1(x) = \frac{x\sin x}{1-2x\cos x+x^2}$. On a alors,
$$f'(x) = \frac{\sin x}{1-2x\cos x+x^2} + \frac{x\cos x - x^2}{1-2x\cos x+x^2}$$
On peut réécrire
$$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1-2x\cos x+x^2}$$

2. 2.1. M_n est diagonalisable car symétrique réelle.

2.2. M_n est clairement de rang 1. Par le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$. Or, si on note $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $(e_2,\dots,e_{n-1},e_1-e_n)$ qui est une famille libre de ce noyau. Comme elle a le bon nombre d'éléments, elle forme une base de $E_0(M_n)$. Il reste à trouver la dernière valeur propre. M_n étant diagonalisable, la trace de M_n est la somme des valeurs propres et vaut 2. Donc la dernière valeur propre est 2. Or il est aisé de voir que e_1+e_n est un vecteur propre de M_n associé à la valeur propre 2. Comme des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe (et ici, ils sont supplémentaires car M_n est diagonalisable), la concaténation des deux bases donne une base de $\mathbb{R}^n$.

Planche B36 — Mines – Télécom 2017

1. On définit la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

1.2. Dans l'affirmative, la diagonaliser.

2. 2.1. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
On suppose que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers g.
Démontrer que la fonction g est bornée.

2.2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\geqslant 1,\quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } |x|\leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$
Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Solution

1. 1.1. $\chi_A = (X+1)(X^2+1)$.
χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
$\chi_A = (X+1)(X+i)(X-i)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$: A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1.2. Les sous-espaces propres de A sont tous les trois de dimension 1.
$(1,1,1)\in E_{-1}(A)$, donc $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.
On trouve ensuite $E_{-i}(A) = \mathrm{Vect}(1+i,2,0)$ et $E_i(A) = \mathrm{Vect}(1-i,2,0)$.
On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. On a alors $A = PDP^{-1}$.

2. 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée sur X, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{M}_n \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in \mathrm{X}, |g_n(x)| \leqslant \mathrm{M}_n$. (*)
Notons que ce majorant M_n dépend de n.
(g_n) converge uniformément vers g sur X. Ce qui signifie que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow \forall x \in \mathrm{X}, |g_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. (1)
Prenons $\varepsilon = 1$ et fixons un entier N vérifiant (1) pour ce choix de ε.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow \forall x \in \mathrm{X}, |g_n(x) - g(x)| \leqslant 1$.
En particulier, $\forall x \in \mathrm{X}, |g_\mathrm{N}(x) - g(x)| \leqslant 1$. (**)
Or, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in \mathrm{X}, |g(x)| \leqslant |g(x) - g_\mathrm{N}(x)| + |g_\mathrm{N}(x)|$.

Donc, d'après (*) et (**), $\forall x \in \mathrm{X}, |g(x)| \leqslant 1 + \mathrm{M}_\mathrm{N}$.

Ce qui signifie que g est bornée sur X.

2.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow \dfrac{1}{n} < |x|$.
Fixons un tel entier N.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{x}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$.
On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée car $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant n$.

Or f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la question précédente, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Planche B37 — Mines – Télécom 2017

1. On lance 6 dés équilibrés. On relance ensuite uniquement les dés qui n'ont pas donné 6 jusqu'à ce que tous les dés aient donné 6. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du dernier 6.

1.1. Donner la loi de X. On pourra utiliser la fonction de répartition.

1.2. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ?

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{M} \neq 0$ et $\mathrm{M}^2 = 0$.

2.1. Donner la dimension du noyau de M et de son image.

2.2. Montrer que M est semblable à la matrice N suivante :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution

1. 1.1. On note X_i la variable aléatoire qui donne le rang de la première apparition du 6 sur le i-ème dé. Les X_i sont indépendantes et suivent la même loi.
X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant n-1)$.
Or pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant p) = \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{6} (\mathrm{X}_i \leqslant p)\right)$. Les dés étant indépendants les uns des autres,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant p) = \prod_{i=1}^{6} \mathrm{P}(\mathrm{X}_i \leqslant p) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \leqslant p)^6.$$

Or $P(X_1 \leqslant p) = \sum_{k=1}^{p} P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^p}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^p$. Et donc

$$P(X \leqslant p) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^p\right)^6.$$

Il vient donc

$$P(X = n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^6 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^6.$$

On peut encore écrire, avec la formule du binôme et en regroupant les termes :

$$P(X = n) = \sum_{k=1}^{6} \binom{6}{k} (-1)^{k+1} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^{n-1}.$$

1.2. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} nP(X = n)$. Or $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^{n-1}$ converge car $n^2 \times n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^{n-1}$ converge vers 0 par croissances comparées ; on conclut par comparaison aux séries de Riemann. $\sum_{n\geqslant 1} nP(X = n)$ converge alors par linéarité.
On a alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} \binom{6}{k} (-1)^{k+1} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^{n-1}.$$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^2}$ car on reconnaît la dérivée de la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
On a alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} \binom{6}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k}.$$

On trouve E(X) légèrement inférieure à 14. Il faut donc en moyenne un peu moins de 14 lancers pour obtenir six 6 avec les six dés.

2. 2.1. $M^2 = 0$ donne $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(M)$. On a donc $\dim \mathrm{Im}(M) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(M)$. Par ailleurs le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Im}(M)+\dim \mathrm{Ker}(M)=3$. Etudions tous les cas possibles pour la dimension de l'image de M.
La dimension de l'image de M vaut 0 : alors $M = 0$, contradiction.
La dimension de l'image de M vaut 2. Alors la dimension du noyau vaut 1 et $2 \leqslant 1$, contradiction.
La dimension de l'image de M vaut 3. Alors M est inversible, M^2 aussi. Or $M^2 = 0$, contradiction.
Il ne reste que le cas où la dimension de l'image de M est 1 et la dimension du noyau est alors 2.

2.2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. On choisit e_1 non nul, dans l'image de f. Alors il existe $t \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_1 = f(t)$ et e_1 est aussi dans le noyau de f. On complète e_1 en une base (e_1, e_2) du noyau de f. On note $e_3 = t$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient λ, μ et ν réels tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$. On applique f. Il reste $\nu e_1 = 0$ et donc $\nu = 0$. Il reste alors $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0$. Comme (e_1, e_2) est libre, il vient $\lambda = \mu = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Comme son cardinal est 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est bien $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. M est bien semblable à cette dernière matrice car les deux matrices représentent le même endomorphisme (f).

Planche B38 — Mines – Télécom 2017

1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$.

1.1. La valeur 1 est-elle valeur propre de B ?

1.2. La matrice $B - I_n$ est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

1.3. Montrer que $AB = BA$.

2. Montrer que la série suivante converge et exprimer sa somme sans intégrale :

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-tn}\,\mathrm{d}t$$

Solution

1. **1.1.** Supposons que 1 est valeur propre de B. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, tel que $BX = X$. On a alors $ABX = AX + BX$ et donc $AX = AX + X$ et finalement $X = 0$: contradiction. Donc 1 n'est pas valeur propre de B.

   1.2. $B - I_n$ est donc inversible. On remarque que $(A - I_n)(B - I_n) = AB - A - B + I_n = I_n$. En multipliant à droite par l'inverse de $B - I_n$, on trouve $(B - I_n)^{-1} = A - I_n$.

   1.3. On a donc $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$ et donc $BA - B - A + I_n = I_n$ et finalement, $BA = B + A = A + B = AB$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \sin(t)e^{-tn}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $t \mapsto e^{-nt}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence). Donc $t \mapsto \sin(t)e^{-tn}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-tn}dt$ converge.
   On note u_n cette intégrale, on a $u_n = \operatorname{Im}\int_0^{+\infty}e^{(i-n)t}dt$, cette dernière intégrale converge pour les mêmes raisons que précédemment. Or $\int_0^{+\infty}e^{(i-n)t}dt = \frac{-1}{i-n}$ et finalement, $u_n = \frac{1}{1+n^2}$. On a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge. On note S sa somme.
   On a $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}$ (sans intégrale).

C. Concours Mines – Ponts

Planche C1 — Mines – Ponts 2022

1. **1.1.** Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad P(x+n) = \sum_{k=0}^{n-1}a_kP(x+k)$$

   1.2. Expliciter une telle suite.

2. **2.1.** Trouver $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \geqslant 1,\quad \int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

   2.2. Démontrer, en justifiant pour quels réels $t \in \mathbb{R}$ la relation est valable, que :

$$\forall n \geqslant 1,\quad \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

   2.3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Solution

1. **1.1.** On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à P associe $P(X+1)$. En écrivant la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et en remarquant qu'elle est triangulaire supérieure, on peut facilement obtenir le polynôme caractéristique de Δ, à savoir $\Delta(\lambda) = (\lambda-1)^n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $(\Delta - \mathrm{Id})^n = 0$. Après application du binôme de Newton (Δ et Id commutent) on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta^k = 0$$

   En évaluant en $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et en mettant le terme $\Delta^n(P)$ de côté, cela donne :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\quad \Delta^n(P) = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta^k(P)$$

Enfin, en évaluant en $x \in \mathbb{R}$ cette relation polynomiale, on obtient :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(x+k)$$

1.2. Une réponse a été donnée ci-dessus.

2. 2.1. En calculant l'intégrale proposée (par intégrations par parties), on trouve facilement que $a = 1/(2\pi)$ et $b = -1$ conviennent.

2.2. On mène ce calcul classique de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right)\end{aligned}$$

ceci ayant un sens tant que $e^{it} \neq 1$, c'est-à-dire tant que $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Enfin, avec la technique de l'angle moitié, on peut facilement calculer cette partie réelle et on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Avec la formule $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$, on obtient bien le résultat annoncé.

2.3. On fixe $N \in \mathbb{N}$, et on écrit grâce aux questions précédentes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{N} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\sum_{k=1}^{N}\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t}_{I_N} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\mathrm{d}t}_{I}\end{aligned}$$

On montre alors que la fonction suivante :

$$g : t \mapsto \frac{\left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Cela permet ensuite de prouver de façon classique par intégration par parties (en dérivant g) que I_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Par conséquent, par passage à la limite, on trouve que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = I = \frac{\pi^2}{6}$$

Planche C2 — Mines – Ponts 2022

1. Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

2. Pour A, B dans $S_n(\mathbb{R})$, on note $A \sim B$ si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T BP$.

2.1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $S_n(\mathbb{R})$.

2.2. Déterminer les classes d'équivalence de $\sim$.

Solution

1. ■ Si $x=0$, la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n(x)$ est de terme général nul et converge donc. Si $x>0$, on observe que $n^2 u_n(x)$ tend vers 0 par croissances comparées, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n(x)$. Finalement, on obtient la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

   ■ Soit $n\geqslant 2$ et $x\in\mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}\\ &\leqslant \frac{x}{\ln(n+1)}\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx}\\ &= \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)}\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{-x})^k\\ &= \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}\\ &\leqslant \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}\end{aligned}$$

   On peut alors vérifier que la fonction $x\mapsto \frac{xe^{-x}}{(1-e^{-x})}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, disons par $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$, de sorte que :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Ceci prouve la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

   ■ Soit $n\geqslant 2$. Après étude de la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$, on observe que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} u_n(x) = u_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n\ln(n)}$$

   Ce terme étant un terme général de série divergente, il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.

2. **2.1.** On vérifie facilement la réflexivité, la symétrie et la transitivité de la relation $\sim$.

   2.2. Soit $\mathrm{A}\in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On note cl(A) la classe d'équivalence de A pour $\sim$. D'après le théorème spectral, la matrice A est diagonalisable et on notera $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres réelles de A (avec d'éventuelles répétitions). On peut alors facilement prouver par double inclusion (en utilisant le théorème spectral dans les deux sens) que :

$$\mathrm{cl(A)} = \left\{\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mathrm{P},\ \mathrm{P}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$$

Planche C3 — Mines – Ponts 2022

1. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})^2$. On suppose que $\det(\mathrm{A}+k\mathrm{B})=\pm 1$ pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$.
   Calculer $|\det(\mathrm{A})|$ et $\det(\mathrm{B})$.
2. On étudie la fonction $f:[-1,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\geqslant -1,\quad f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+x\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

   2.1. Vérifier la bonne définition de f.

   2.2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et donner f'.

   2.3. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Solution

1. Avec $k=0$, on obtient $\det(A)=\pm 1$ de sorte que $|\det(A)|=1$. Pour la suite, on pose $P(x)=\det(A+xB)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On remarque que P est une fonction polynomiale de degré au plus n. Ainsi $Q=P^2-1$ est polynomiale de degré au plus $2n$. Mais, d'après l'énoncé, Q admet les entiers de $[\![0,2n]\!]$ pour racines. On en déduit que Q admet au moins $2n+1$ racines alors qu'il est de degré au plus $2n$ de sorte que $Q=0$. Il vient donc que $P(x)=\det(A+xB)=\pm 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On écrit alors, pour $x>0$, que $\det(A+xB)=x^n\det(A/x+B)$. Par continuité de l'application det, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\det(A/x+B)=\det(B)$$

On conclut alors :

$$\det(B)=\lim_{x\to+\infty}\det(A/x+B)=\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{x^n}=\frac{\pm 1}{x^n}=0$$

2. 2.1. Pour $x>-1$, $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment et existe donc bien. Pour $x=-1$, l'intégrande est continu sur $]0,\pi/2]$ et, en 0, on a :

$$\ln(1-\cos^2 t)=\ln(\sin^2 t)=2\ln(\sin t)=2\ln\left(\tfrac{\sin t}{t}\cdot t\right)=2\ln t+2\ln\left(\tfrac{\sin t}{t}\right)\underset{t\to 0}{\sim}2\ln t$$

où l'équivalent est justifié par le fait que $\sin t/t$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0. La fonction ln étant intégrable au voisinage de 0, par théorème de comparaison, on obtient que $f(-1)$ existe.

2.2. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètres et on obtient :

$$\forall x>-1,\quad f'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+x\cos^2 t}\,dt$$

Pour $x>-1$ et $x\neq 0$, on peut calculer cette dernière intégrale en posant $u=\tan t$ et par décomposition en éléments simples :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+x\cos^2 t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)(1+x+u^2)}=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+x+u^2}=\frac{\pi}{2x}-\frac{\pi}{2x\sqrt{1+x}}$$

2.3. On primitive l'expression précédente sur $J=\,]-1,0[$ pour obtenir :

$$\forall x\in J,\quad f(x)=\frac{\pi}{2}\ln\left(x\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right)+C$$

où C est une constante. Par théorème de continuité des intégrales à paramètres, on peut justifier que f est continue sur $[-1,+\infty[$ de sorte que $f(x)$ tend vers $f(0)=0$ lorsque x tend vers 0. On peut ainsi obtenir que $C=-\pi\ln 2$. Enfin, on remarque facilement que l'intégrale I recherchée n'est rien d'autre que $f(-1)/2$ de sorte que par continuité de f en -1, il vient :

$$I=\frac{1}{2}f(-1)=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\pi}{4}\ln\left(x\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right)+\frac{C}{2}=\frac{C}{2}=-\frac{\pi\ln 2}{2}$$

Planche C4 — Mines – Ponts 2022

1. Déterminer les matrices $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^5-4M^4+2M^3+8M^2-8M=0\qquad\text{et}\qquad \mathrm{Tr}(M)=0$$

2. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et strictement monotone telle que $\varphi\circ\varphi=2\varphi-\mathrm{Id}$.
Dans la suite, pour $n\in\mathbb{N}$, on notera $\varphi^{[n]}=\varphi\circ\varphi\circ\cdots\circ\varphi$ (n fois) avec la convention $\varphi^{[0]}=\mathrm{Id}$.

2.1. Prouver que φ est une bijection strictement croissante.

2.2. Montrer que la suite $(\varphi^{[n]}/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et déterminer sa limite.

2.3. Établir qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x)=x+c$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Solution

1. Le polynôme $P(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$ est annulateur de M. On peut facilement factoriser P sous la forme $P(X) = X(X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. Par propriété classique, on a donc $\mathrm{sp}(M) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\}$. Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de M est scindé de sorte que la trace de M vaut la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. On notera m_0, m_2, m_+ et m_- les multiplicités respectives de 0, 2, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, en convenant que la multiplicité est nulle si jamais la valeur n'est pas valeur propre de M (on n'a qu'une inclusion des valeurs propres dans $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\}$). Étant donné que $\mathrm{Tr}(M) = 0$, il vient alors :

$$2m_2 + \sqrt{2}(m_+ - m_-) = 0$$

Si $m_+ - m_- \neq 0$, la relation précédente donne que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $m_+ - m_- = 0$, c'est-à-dire $m_+ = m_-$. La relation donne alors $m_2 = 0$. Ainsi 2 n'est pas valeur propre de M et $M - 2I_n$ est donc inversible. En écrivant l'identité $P(M) = 0$ avec la version factorisée de P, en remarquant que M et $(M-2I_n)^2$ commutent et en multipliant par $(M-2I_n)^{-2}$ à gauche, on obtient $M(M-\sqrt{2}I_n)(M+\sqrt{2}I_n) = 0$. Ainsi $Q(X) = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ est annulateur de M et, comme il est scindé à racines simples, M est diagonalisable. En notant m la multiplicité commune de $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, M est donc semblable à une matrice diagonale par blocs du type $\mathrm{diag}(0I_{m_0}, \sqrt{2}I_m, -\sqrt{2}I_m)$. Réciproquement, toute matrice semblable à une matrice diagonale par blocs du type précédent vérifie les contraintes de l'énoncé.

2. **2.1.** Par hypothèse, φ est continue et strictement monotone donc bijective d'après le théorème de la bijection. Reste à prouver qu'elle est strictement croissante. Supposons par l'absurde qu'elle soit strictement décroissante. Dans ce cas, $\varphi\circ\varphi$ serait strictement croissante et $\varphi\circ\varphi + \mathrm{Id}$ le serait donc aussi. Mais $\varphi\circ\varphi + \mathrm{Id} = 2\varphi$ et φ a été supposée strictement décroissante, c'est absurde. Ceci permet de conclure que φ est strictement croissante.

2.2. Grâce à la relation de l'énoncé, on a, pour $n \geqslant 1$:

$$\varphi^{[n+1]} - \varphi^{[n]} = \varphi\circ\varphi\circ\varphi^{[n-1]} - \varphi^{[n]} = 2\varphi\circ\varphi^{[n-1]} - \varphi^{[n-1]} - \varphi^{[n]} = \varphi^{[n]} - \varphi^{[n-1]}$$

On en déduit que $\varphi^{[n+1]} - \varphi^{[n]} = \varphi - \mathrm{Id}$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui permet ensuite d'obtenir, pour $n \geqslant 0$:

$$\varphi^{[n]} = \mathrm{Id} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\varphi^{[k+1]} - \varphi^{[k]}\right) = \mathrm{Id} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\varphi - \mathrm{Id}\right) = \mathrm{Id} + n\left(\varphi - \mathrm{Id}\right)$$

On en déduit que :

$$\frac{\varphi^{[n]}}{n} = \frac{\mathrm{Id}}{n} + \left(\varphi - \mathrm{Id}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi - \mathrm{Id}$$

2.3. Si jamais $\varphi = \mathrm{Id}$, le résultat est démontré avec $c = 0$. On suppose maintenant $\varphi \neq \mathrm{Id}$. Ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(a) \neq a$. On distingue deux cas :

- Si $\varphi(a) > a$.
  Une des relations obtenues à la question précédente donne $\varphi^{[n]}(a) = a + n(\varphi(a) - a)$ pour $n \geqslant 0$, identité que l'on peut facilement prolonger sur $\mathbb{Z}$ par récurrence. Ainsi, la suite $(\varphi^{[n]}(a))_{n\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante et de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, il existe donc un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\varphi^{[p]}(a) \leqslant x \leqslant \varphi^{[p+1]}(a)$$

  Par croissance de φ, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\varphi^{[p+n]}(a)}{n} \leqslant \frac{\varphi^{[n]}(x)}{n} \leqslant \frac{\varphi^{[p+n+1]}(a)}{n}$$

  Par théorème d'encadrement, on en déduit en utilisant l'expression de la limite simple trouvée à la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi^{[n]}(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi^{[n]}(a)}{n} = \varphi(a) - a$$

- Si $\varphi(a) < a$, un raisonnement similaire peut être mené.

Dans les deux cas, on peut bien conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi^{[n]}}{n} = \varphi(a) - a$$

Par unicité de la limite simple, grâce à la question précédente, on a $\varphi - \mathrm{Id} = \varphi(a) - a$, c'est-à-dire $\varphi = \mathrm{Id} + c$ avec $c = \varphi(a) - a$, ce que l'on voulait.

1. **1.1.** Soit $\|.\|$ une norme euclidienne sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Discuter du cas d'égalité.

1.2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère U et V dans $O_n(\mathbb{R})$ telles que $UX + VX = 2X$.
Montrer que $UX = VX = X$.

1.3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère U et V dans $O_n(\mathbb{R})$ telles que $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$.
Montrer que $UM = MU$ et $VM = MV$.

2. On fixe $p \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

2.1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

2.2. Calculer, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = k \mid S = n)$.

2.3. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait la relation $\mathbb{P}(Z > n+1 \mid Z > n) = 1 - p$. Déterminer la loi de Z.

SOLUTION

1. **1.1.** C'est du cours ! Il y a égalité si et seulement si (x, y) sont positivement liés.

1.2. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $((X, Y) \mapsto {}^tXY)$. On prend la norme euclidienne associée. On a $\|2X\| = \|UX+VX\|$ et donc $2\|X\| \leqslant \|UX\|+\|VX\|$. Or U et V étant des matrices orthogonales, i.e. représentant des isométries, $\|UX\| = \|X\|$ et $\|VX\| = \|X\|$. On a donc

$$2\|X\| \leqslant \|UX+VX\| \leqslant \|UX\| + \|VX\| \leqslant 2\|X\|$$

et donc les inégalités deviennent des égalités : on a égalité dans l'inégalité triangulaire utilisée au milieu. UX et VX sont donc positivement liés.
Ou bien $UX = 0$, et comme U est inversible, $X = 0$ et les égalités demandées sont évidentes.
Ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $VX = \alpha UX$. Alors, $\|UX\| = \|X\|$ donne $\alpha\|X\| = \|X\|$ et comme $X \neq 0$, $\|X\| \neq 0$. Il vient alors $\alpha = 1$ et donc $UX = VX$. Comme, $UX + VX = 2X$, il vient $2UX = 2X$ et donc $UX = X$ et finalement, $UX = VX = X$.

1.3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $((M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN))$. On utilise alors la norme euclidienne associée. Comme précédemment,

$$2\|M\| \leqslant \|UMU^{-1}\| + \|VMV^{-1}\|.$$

Or, $\|UMU^{-1}\|^2 = \mathrm{Tr}({}^t(UMU^{-1})(UMU^{-1})) = \mathrm{Tr}(U\,{}^tMU^{-1}UMU^{-1}) = \mathrm{Tr}(U\,{}^tMMU^{-1})$ et comme $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, on obtient, $\|UMU^{-1}\|^2 = \|M\|^2$, d'où

$$2\|M\| \leqslant \|UMU^{-1} + VMV^{-1}\| \leqslant \|UMU^{-1}\| + \|VMV^{-1}\| \leqslant 2\|M\|.$$

On a égalité dans l'inégalité triangulaire : UMU^{-1} et VMV^{-1} sont positivement liés.
Ou bien $UMU^{-1} = 0$ et comme U est inversible, $M = 0$ et les égalités voulues sont évidentes.
Ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $VMV^{-1} = \alpha UMU^{-1}$ et comme UMU^{-1} et VMV^{-1} sont de même norme (celle de M), il vient $\alpha = 1$ et donc $UMU^{-1} = VMV^{-1}$ et comme $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$, on a bien $UMU^{-1} = VMV^{-1} = M$. Or, $UMU^{-1} = M$ donne $UM = MU$ et de même $VM = MV$.

2. **2.1.** S est à valeurs dans $[\![2, +\infty]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

$$P(S = n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (X = k) \cap (Y = n-k)\right).$$

Les événements étant incompatibles, il vient

$$P(S = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P((X = k) \cap (Y = n-k)) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(Y = n-k)$$

les variables X et Y étant indépendantes. On a alors

$$P(S = n) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{n-k-1} p = p^2(1-p)^{n-2}(n-1).$$

2.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1-p = \mathrm{P}(\mathrm{Z} > n+1 \mid \mathrm{Z} > n) = \frac{\mathrm{P}((\mathrm{Z} > n+1) \cap (\mathrm{Z} > n))}{\mathrm{P}(\mathrm{Z} > n)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{Z} > n+1)}{\mathrm{P}(\mathrm{Z} > n)}.$$

$(\mathrm{P}(\mathrm{Z} > n))_{n\geqslant 1}$ est donc une suite géométrique de raison $1-p$. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{Z} > n) = (1-p)^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 1)$. Si on note $q = \mathrm{P}(\mathrm{Z} = 1)$, $\mathrm{P}(\mathrm{Z} > n) = (1-p)^{n-1}(1-q)$.
On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = n) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} > n-1) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} > n) = (1-p)^{n-2}(1-q) - (1-p)^{n-1}(1-q) = p(1-p)^{n-2}(1-q).$$

Planche C6 — Mines – Ponts 2017

1. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad \mathrm{Ker}(u) = v(\mathrm{Ker}(u)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(v) = u(\mathrm{Ker}(v))$$

1.1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.

1.2. Généraliser pour une famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'endomorphismes de E qui commutent.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite infinie. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-x_n t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x_n}$$

Solution

1. 1.1. On doit prouver une double inclusion.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$; on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$. De même $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$ et comme le noyau est un espace vectoriel,

$$\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$. on a alors $v(x) \in \mathrm{Ker}(u) = v(\mathrm{Ker}(u))$. Il existe ainsi $y \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $v(x) = v(y)$. Posons $z = x - y$: c'est un élément de $\mathrm{Ker}(v)$. On a ainsi $x = y + z \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Ceci prouve que

$$\mathrm{Ker}(u \circ v) \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$$

On a ainsi l'égalité demandée.

1.2. On suppose que

$$\forall i \neq j,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i,\ \mathrm{Ker}(u_i) = u_j(\mathrm{Ker}(u_i))$$

On veut alors montrer que

$$\mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_i)$$

Comme dans le cas $n = 2$, on a $\mathrm{Ker}(u_i) \subset \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_n)$ pour tout i de manière simple (et comme les u_i commutent). Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_i) \subset \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_n)$$

On prouve l'inclusion réciproque par récurrence sur n.

- Initialisation : le résultat a été prouvé pour $n = 2$ (il est aussi vrai pour $n = 1$ de façon immédiate).
- Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n. On se donne $n+1$ endomorphismes convenables. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_{n+1})$. En particulier, $u_{n+1}(x) \in \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_n)$ et le résultat au rang n donne une décomposition

$$u_{n+1}(x) = x_1 + \cdots + x_n \ \text{ avec } \ x_i \in \mathrm{Ker}(u_i)$$

Comme $\mathrm{Ker}(u_i) = u_{n+1}(\mathrm{Ker}(u_i))$, il existe $y_i \in \mathrm{Ker}(u_i)$ tel que $x_i = u_{n+1}(y_i)$. On a ainsi

$$u_{n+1}(x) = u_{n+1}(y_1 + \cdots + y_n) \ \text{ avec } \ y_i \in \mathrm{Ker}(u_i)$$

et ainsi $x - y_1 - \cdots - y_n \in \mathrm{Ker}(u_{n+1})$ ce qui nous donne la décomposition de x voulue.

2. Il s'agit d'utiliser un théorème d'interversion. Il est plus naturel ici d'utiliser le théorème de convergence dominée (celui d'intégration terme à terme est inadapté car le signe $(-1)^n$ est crucial). Posons donc $f_n : t \mapsto (-1)^n e^{-x_n t}$.
   - (f_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout réel $t > 0$, $\sum(f_n(t))$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale (terme de signe alterné, décroissant en module et de limite nulle avec les hypothèses sur (x_n)). Ainsi, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - D'après la règle spéciale, on a

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall t \in [a,b],\ \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\right| \leqslant |f_{n+1}(t)| \leqslant e^{-x_n a}$$

   On en déduit que

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right\|_{\infty,[a,b]} \leqslant e^{-x_n a} \to 0$$

   $\sum(f_n)$ converge donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et la somme simple de la série est donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque les f_n le sont.
   - La règle spéciale donne aussi

$$\forall t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leqslant |f_0(t)| = e^{-x_0 t}$$

   Comme $x_0 > 0$, le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a vérifié l'hypothèse de domination.

Le théorème s'applique et indique que la somme simple est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-x_n t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^n e^{-x_n t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n}$$

Planche C7 — Mines – Ponts 2017

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On suppose que $A^3 + A + I_n = B^3 + B + I_n$. Montrer que $A = B$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

   2.1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
   2.2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et -1.
   2.3. Proposer une méthode pour obtenir la somme de la série.

Solution

1. Notons $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres ordonnées de A. A est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et, en notant $P = X^3 + X + 1$, P(A) est semblable à $\mathrm{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$. $x \mapsto P(x)$ étant croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée positive), les valeurs propres de P(A) sont $P(\lambda_1) \leqslant \ldots \leqslant P(\lambda_n)$.
   En notant de même $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres ordonnées de B, les valeurs propres de P(B) sont $P(\mu_1) \leqslant \ldots \leqslant P(\mu_n)$.
   Comme $P(A) = P(B)$, on en déduit que $\forall i,\ P(\lambda_i) = P(\mu_i)$. Or, P est en fait strictement croissante et donc injective et ainsi $\forall i,\ \lambda_i = \mu_i$.
   On a déjà montré que A et B ont mêmes valeurs propres avec même ordre de multiplicité (égal à la dimension du sous-espace propre puisque l'on est dans le cas diagonalisable).
   L'injectivité de P montre que $E_\lambda(A)$ et $E_{P(\lambda)}(P(A))$ ont même dimension (les multiplicités de λ et $P(\lambda)$ dans A et P(A) sont les mêmes et on est dans le cas diagonalisable). Or, $E_\lambda(A) \subset E_{P(\lambda)}(P(A))$ est immédiat. Par dimension, on a une égalité.
   Comme on peut faire la même chose pour B, on a donc les sous-espaces propres de A et B qui sont les mêmes.
   Comme les matrices sont diagonalisables, qu'elles ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres associés ; elles sont égales.

2. 2.1. Il est immédiat que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 1^n\, dt = 1$$

Ainsi $(a_n x^n)$ est une suite bornée pour $|x| < 1$ et le rayon de convergence est plus grand que 1.
Par ailleurs, comme $1 \geqslant t^2$ quand $t \in [0,1]$, on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant \int_0^1 t^{2n}\, dt = \frac{1}{2n+1}$$

ce qui prouve que $(a_n x^n)$ est non bornée si $|x| > 1$. Le rayon de convergence est ainsi égal à 1.

2.2. La minoration $a_n \geqslant \frac{1}{2n+1} \geqslant 0$ prouve que $\sum(a_n)$ diverge.
(a_n) est une suite décroissante (pour $t \in [0,1]$, plus n est grand, plus $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ est petit). On a

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt = \frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{n+1}(1+t)^{n+1}\right]_0^1 \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre que $a_n \to 0$ (ce que l'on aurait aussi pu prouver en utilisant le théorème de convergence dominée). Comme, enfin, $((-1)^n a_n)$ est alternée, la règle spéciale montre que $\sum((-1)^n a_n)$ converge.

2.3. Notons S la somme de la série entière. On a

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(x\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$$

Fixons $x \in]-1,1[$ et posons $f_n\ :\ t \mapsto \left(x\frac{1+t^2}{2}\right)^n$. (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \leqslant |x|^n$$

Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant |x|^n$ est le terme général d'une série convergente. $\sum(f_n)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,1]$ et on est dans le cas simple où l'on peut intervertir :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(x\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{2}{(2-x)-xt^2}\, dt$$

Il reste alors à calculer l'intégrale.

Planche C8 — Mines – Ponts 2017

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2 n^2}$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.1. Donner le domaine de définition de f. Étudier sa continuité.
1.2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
1.3. Trouver un équivalent de f en 0.

2. Le but de l'exercice est de trouver les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M} + 2\mathrm{I}_3 = 0 \qquad \text{(E)}$$

2.1. Trouver deux polynômes U et V tels que $(\mathrm{X}-1)^2\mathrm{U} + (\mathrm{X}+2)\mathrm{V} = 1$.
2.2. En déduire que si M vérifie (E) alors $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}((\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)^2) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M}+2\mathrm{I}_3)$.
2.3. Que dire d'une solution M dont 1 n'est pas valeur propre ?
2.4. Que dire d'une solution M dont 2 n'est pas valeur propre ?
On montrera que M *peut être de deux formes seulement.*

2.5. Traiter les cas restants.

Solution

1. On pose $f_n(x) = e^{-x^2 n^2}$.

1.1. Si $x \leqslant 0$ alors $\sum(f_n(x))$ diverge grossièrement.
Si $x > 0$ alors $f_n(x) = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente.
La fonction f est ainsi définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ (il y a convergence simple de $\sum(f_n)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$).
Toutes les fonctions f_n sont continues et

$$\forall a > 0,\ \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant e^{-n^2 a^2}$$

Le majorant étant le terme général d'une série convergente, $\sum(f_n)$ converge normalement sur toute partie $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ et donc a fortiori sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Le théorème de continuité des séries de fonctions donne

$$f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^{+*})$$

1.2. La question précédente montre que $\sum(f_n)$ converge normalement au voisinage de $+\infty$. Chaque fonction f_n admettant une limite finie en $+\infty$ (0 si $n \geqslant 1$ et 1 si $n = 0$), on peut utiliser le théorème de double limite et en déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$$

1.3. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-x^2t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Une comparaison série-intégrale donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\, dt + 1$$

Le changement de variable linéaire $u = xt$ donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

Dans notre encadrement, le terme 1 est négligeable et le majorant et minorant sont tous deux équivalents à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x}$ $(x \to 0)$. On en déduit (diviser par ce terme et utiliser le théorème d'éncadrement)

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

2. On remarque que $X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$.

2.1. On cherche U de degré 0 et V de degré 1 (par exemple par coefficients indéterminés). On trouve facilement que

$$\frac{1}{9}(X-1)^2 + \left(\frac{4}{9} - \frac{X}{9}\right)(X+2) = 1$$

2.2. Appliquons cette égalité polynomiale à M :

$$9I_3 = (M - I_3)^2 + (4I_3 - M)(M + 2I_3)$$

En particulier (ici $\mathbb{R}^3$ est identifié aux matrices unicolonne)

$$\forall X \in \mathbb{R}^3,\ 9X = (M - I_3)^2X + (M + 2I_3)(4I_3 - M)X = Y + Z \qquad (*)$$

Supposons que M vérifie (E). On a alors $(M - I_3)^2(M + 2I_3) = 0$. Avec les notations ci-dessus, $Y \in \operatorname{Ker}(M + 2I_3)$ et $Z \in \operatorname{Ker}(M+2I_3)$. $X = \frac{1}{9}Y + \frac{1}{9}Z$ est donc dans $\operatorname{Ker}((M-I_3)^2) + \operatorname{Ker}(M+2I_3)$. Ceci montre une inclusion et l'autre éest immédiate :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}((M - I_3)^2) + \operatorname{Ker}(M + 2I_3)$$

Si $X \in \operatorname{Ker}((M-I_3)^2) \cap \operatorname{Ker}(M+2I_3)$ alors $(M-I_3)^2X = 0$ et $(M+2I_3)X = 0$. Avec $(*)$, on voit que $X = 0$ (noter que $(M + 2I_3)(4I_3 - M) = (4I_3 - M)(M + 2I_3)$). La somme est donc directe.

2.3. Si 1 n'est pas valeur propre de M alors $M - I_3$ est inversible. Comme $(M - I_3)^2(M + 2I_3) = 0$, la multiplication à gauche par l'inverse de $M - I_3$ (deux fois) montre que $M = -2I_3$. Réciproquement, $-2I_3$ est solution de (E).

2.4. Si 2 n'est pas valeur propre alors $(M-I_3)^2 = 0$ et donc $\mathrm{Im}(M-I_3) \subset \mathrm{Ker}(M-I_3)$. Par théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{Im}(M-I_3)$ peut être de dimension 0 ou 1 (si sa dimension est plus grande que 2 , la somme des dimensions de l'image et du noyau est plus grande que 4 ; or, cette somme vaut 3).
Si l'image est de dimension 0, $M = I_3$.
Si l'image est de dimension 1, il existe un vecteur e_1 non nul tel que $\mathrm{Im}(M-I_3) = \mathrm{Vect}((M-I_3)e_1)$. On note $e_2 = (M-I_3)e_1$. C'est un élément de $\mathrm{Ker}(M-I_3)$. On peut compléter pour obtenir (e_2, e_3) base du noyau. On vérifie que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre (si $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$, on obtient $\alpha_1 = 0$ en composant par $M-I_3$ et on a alors $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ car (e_2, e_3) est libre). En utilisant cette base, on voit que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5. Il reste le cas où 1 et -2 sont valeurs propres. Les noyau de $M-I_3$ et de $M+2I_3$ sont de dimension au moins 1.

- Si $\mathrm{Ker}(M+2I_3)$ est de dimension 2 alors M est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(1,-2,-2)$ (puisque $\mathrm{Ker}(M-I_3)$ est au moins de dimension 1, il ne peut être que de dimension 1 car les sous-espaces propres sont en somme directe).
- Sinon, $\mathrm{Ker}(M+2I_3)$ est de dimension 2 et $\mathrm{Ker}((M-I_3)^2)$ est de dimension 2.
  Si $\mathrm{Ker}(M-I_3)$ est de dimension 2 alors M est semblable à $\mathrm{diag}(1,1,-2)$.
  Sinon on construit comme plus haut haut une famille (e_1, e_2)telle que $Me_1 - e_1 = e_2$ avec (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}((M-I_3)^2)$ et avec cette base, on montre que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

PLANCHE C9 — MINES – PONTS 2017

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telles que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est égal à $+\infty$. On note f la somme de la série entière.

1.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer l'intégrale suivante en fonction de R et de a_n :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

1.2. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que f est constante.

1.3. On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $|f(z)| \leqslant |P(z)|$ pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que f est un polynôme.

2. Soient X, Y deux variables aléatoire indépendantes de même loi $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

Calculer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

3. Soit $\alpha > 0$. Étudier la série de terme général u_n où :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \mathrm{Arctan}\left(1 + \tfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{4}$$

SOLUTION

1. 1.1. On exprime f comme somme de la série entière :

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{R}^k e^{i(k-n)\theta}\,d\theta$$

Il s'agit maintenant d'intervertir les symboles. Comme on intègre sur un segment, il suffit que la série de fonction converge normalement sur ce segment. Ceci a lieu car

$$\forall \theta \in [0, 2\pi],\ |a_k \mathrm{R}^k e^{i(k-n)\theta}| \leqslant |a_k|\mathrm{R}^k$$

et le majorant est le terme général d'une série convergente (indépendant de θ). Ainsi

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\mathrm{R}^k\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,d\theta\right)$$

Comme $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,d\theta$ est nul si $p\in\mathbb{Z}^*$ et vaut 2π si $p=0$, on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = a_n\mathrm{R}^n$$

1.2. On suppose f bornée et on veut montrer que f est constante, c'est à dire que $a_n=0$ pour tout $n\geqslant 1$. Avec la question précédente et l'hypothèse sur f, on a

$$\forall n,\ |a_n|\leqslant \frac{1}{2\pi\mathrm{R}^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{M}\,d\theta = \frac{\mathrm{M}}{2\pi\mathrm{R}^n}$$

Pour $n\geqslant 1$, le majorant est de limite nulle quand $\mathrm{R}\to+\infty$ et ainsi $a_n=0$. f est donc constante.

1.3. P est un polynôme et on note d un majorant de son degré. On a alors $|\mathrm{P}(z)|/|z|^{d+1}$ qui est de limite nulle quand $|z|\to+\infty$ et donc plus petit que 1 pour $|z|$ assez grand, disons $|z|\geqslant\mathrm{R}_0$.
De façon similaire, à la question précédente, on a

$$\forall\mathrm{R}\geqslant\mathrm{R}_0,\ \forall n,\ |a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi\mathrm{R}^n}\int_0^{2\pi}|\mathrm{P}(\mathrm{R}e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{\mathrm{R}^{d+1}}{2\pi\mathrm{R}^n}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient la nullité de tous les a_n pour $n\geqslant d+2$. f est donc polynomiale.

2. La matrice $\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & y\end{pmatrix}$ est diagonalisable si $x\neq y$ (il y a alors deux valeurs valeurs propres différentes et donc deux sous-espaces propres de dimension 1) etnon diagonalisable si $x=y$ (il y a alors une unique valeur propre et la matrice n'est pas du type $x\mathrm{I}_2$). La probabilité de l'événement X = Y s'obtient en décomposant en réunion d'événements incompatibles :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k\cap\mathrm{Y}=k)$$

Par indépendances des variables,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

On a la formule de Vandermonde suivante :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k}=\binom{n_1+n_2}{p}$$

que l'on prouve de façon ensembliste (choisir p éléments parmi n_1+n_2 revient à en choisir $k$parmi les n_1 et $n-k$ parmi les n_2 pour$k=0,\dots,p$). On l'utilise avec $n_1=n_2=n$ et $p=n$ pour conclure que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

La probabilité cherchée est alors

$$1-\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

3. La formule de Taylor-Young appliquée à la fonction Arctan en 1 donne

$$\mathrm{Arctan}(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)$$

On en déduit que

$$u_n=\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}-\frac{1}{4n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

ou encore que

$$u_n - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} \sim -\frac{1}{4n^{2\alpha}}$$

Comme $\sum(\frac{(-1)^n}{2n^\alpha})$ est convergente par règle spéciale (terme général alterné, de limite nulle et décroissant en module), la nature de $\sum(u_n)$ est la même que celle de $\sum(u_n - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha})$. Par théorème de comparaison pour les séries positives, il y a convergence si et seulement si $2\alpha > 1$.

Planche C10 — Mines – Ponts 2017

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f'(x)/f(x)$ soit équivalent à a/x quand x tend vers $+\infty$.
Pour $k > 0$, montrer que $f(kx)/f(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et donner cette limite.
2. On considère un guichet qui accueille des clients un par un. Pour tout entier naturel k on note B_k le nombre de clients qui arrivent faire la queue pendant l'intervalle de temps $[k, k+1[$ et on suppose que B_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On suppose enfin que les $(\mathrm{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes et que le temps qu'un client passe au guichet pour être servi suit une loi de poisson de paramètre λ. On introduit X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui sont arrivés pendant que le guichet s'est occupé d'un client.
Donner la loi de X.

Solution

1. *Pour se faire une idée de la situation, on peut supposer que* $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x}$. *Il existe alors une constante c telle que* $f(x) = cx^a$ *(résolution de l'équation différentielle) et ainsi* $\frac{f(kx)}{f(x)} = k^a$. *On va donc tenter de prouver que* $\frac{f(kx)}{f(x)} \to k^a$ *quand* $x \to +\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'équivalent, il existe A tel que
$$\forall x \geqslant \mathrm{A},\ \left|\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{a}{x}\right| \leqslant \varepsilon\frac{a}{x}$$
Supposons $k \geqslant 1$. Intégrons cette inégalité entre x et kx (ce que l'on peut faire pour $x \geqslant \mathrm{A}$)
$$\forall x \geqslant \mathrm{A},\ \left|\int_x^{kx}\left(\frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{a}{t}\right)dt\right| \leqslant \int_x^{kx}\left|\frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{a}{t}\right|dt \leqslant \varepsilon\int_x^{kx}\frac{a}{t}\,dt$$
et ainsi
$$\forall x \geqslant \mathrm{A},\ \left|\ln\left(\frac{f(kx)}{f(x)}\right) - \ln(k^a)\right| \leqslant \varepsilon a \ln(k^a)$$
Par définition des limites ($a\ln(k^a)$ est une constante) on a donc
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{f(kx)}{f(x)}\right) = \ln(k^a)$$
Il reste à composer par la fonction exponentielle qui est continue pour conclure que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(kx)}{f(x)} = k^a$$
2. Le temps passé par un client au guichet n'étant pas limité, on a $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$.
En notant T le temps de passage du client, on conditionne par le système complet d'événements $(\mathrm{T} = i)_{i\in\mathbb{N}}$:
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{T} = i \cap \mathrm{X} = k)$$
Pour qu'arrivent k clients, il faut que le temps de passage soit au moins égal à k et les termes d'indice $\leqslant k-1$ de la somme sont nuls. Quand $t = i$, on a $\mathrm{X} = \mathrm{B}_1 + \cdots + \mathrm{B}_i$ et donc
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{i=k}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{T} = i \cap \sum_{j=1}^{i}\mathrm{B}_j = k)$$

T est indépendant des B_j et donc de la somme et ainsi

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{i=k}^{\infty}\mathbb{P}(T=i)\mathbb{P}(\sum_{j=1}^{i}B_j=k)$$

Une somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre est une variable binomiale et ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\binom{i}{k}p^k(1-p)^{i-k}\\ &= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^{i-k}(1-p)^{i-k}}{(i-k)!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}\\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

X suit donc une loi de Poisson de paramètre λp.

Planche C11 — Mines – Ponts 2017

1. Soit X un ensemble fini. On dit que $f:X\to X$ est une involution de X si $f\circ f=\mathrm{id}$.
On note, pour $n\in\mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$ et l'on convient que $I_0=1$.

1.1. Calculer I_1, I_2 et I_3.

1.2. Pour $n\in\mathbb{N}$, montrer que $I_{n+2}=I_{n+1}+(n+1)I_n$.
On pose :

$$S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}z^n$$

1.3. Montrer que S a un rayon $R>0$.

1.4. Calculer $(1-x)S(x)$ pour $x\in]-R,R[$. En déduire une expression simple de S puis une expression de I_n.

2. Soit E un espace euclidien et soient p,q des projecteurs orthogonaux de E.

2.1. Donner la définition d'un projecteur orthogonal et un exemple de problème pour lequel la résolution nécessite l'utilisation de projecteurs orthogonaux.

2.2. Montrer que le polynôme caractéristique de $u=p+q$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

2.3. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0,2]$.

2.4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u-2Id)$.

Solution

1. **1.1.** On a immédiatement $I_1=1$. Une involution étant une bijection, les cas $n=2$ et $n=3$ sont faciles à traiter puisqu'il suffit de tester les bijections existantes (en nombre 2 et 6). On trouve $I_2=2$ et $I_3=4$.

1.2. La formule proposée est vraie pour $n=0$. Soit $n\geqslant 1$. On partitionne l'ensemble des involutions de $[|1,n+2|]$ selon la valeur de $f(n+2)$.

- Si $f(n+2)=n+2$, la restriction de f à $[|1,n+1|]$ est une involution de $[|1,n+1|]$ et (réciproquement), tout choix d'une involution de $[|1,n+1|]$ donne une involution de $[|1,n+2|]$ en prolongeant en $n+2$ par la valeur $n+2$.
- Si $f(n+2)=k\in[|1,n+1|]$ alors $f(k)=n+2$. La restriction de f à $[|1,n+1|]\setminus\{k\}$ est une involution de cet ensemble à n élément. Réciproquement, tout choix d'une telle involution donne naissance à une involution de $[|1,n+2|]$.

On a donc

$$I_{n+2}=I_{n+1}+(n+1)I_n$$

1.3. Toute involution étant une bijection, on a $0\leqslant I_n\leqslant n!$ et donc $(I_n/n!)$ est bornée ce qui indique que $R\geqslant 1$.

1.4. Pour $x \in]-1,1[$ (au moins) on a

$$(1+x)\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

En regoupant les sommes et en utilisant la relation vérifiée par I_n, on trouve

$$(1+x)\mathrm{S}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n!} x^n = \mathrm{S}'(x)$$

Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = ce^{x+\frac{1}{2}x^2}$$

Comme $\mathrm{S}(0) = 1$, on a $c = 1$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{S}(x) = e^x e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

Par produit de Cauchy, on trouve

$$\mathrm{I}_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2p}{2k} \text{ et } \mathrm{I}_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2p+1}{2k}$$

2. 2.1. Un projecteur orthogonal de E est un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$ (projection) et $\mathrm{Ker}(p) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}$. Comme E est de dimension finie, cette dernière condition peut-être remplacée (avec le théorème du rang) par $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.
On peut aussi, géométriquement, définir une projection orthogonale (sur F) comme la projection sur F de direction $\mathrm{F}^{\perp}$ (quand F et $\mathrm{F}^{\perp}$ sont supplémentaire ce qui est le cas si F est de dimension finie).
Classiquement, on utilise les projecteurs orthogonaux pour calculer la distance d'un élément $x \in \mathrm{E}$ à un sous-espace F. Cette distance est égale à $\|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|$ où p_{F} est la projection orthogonale sur F.

2.2. Un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique ($\forall x, y,\ (p(x)|y) = (x|p(y))$ ou encore représenté par une matrice symétrique dans une bonne b.o.n, ici une b.o.n adaptée aux supplémentaires orthogonaux $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$). La somme de deux endomorphismes symétrique est symétrique et donc $u = p + q \in \mathrm{S(E)}$. u est donc diagonalisable en b.o.n. (théorème spectral) et son polynôme caractéristique est en particulier scindé (égal au produit des $(\mathrm{X} - \lambda)^d$ pour λ dans le spectre de u et d dimension du sous-espace propre associé).

2.3. Comme p est un projecteur orthogonal et donc symétrique, on a

$$\|p(x)\|^2 = (p(x)|p(x)) = (x|p(p(x))) = (x|p(x)) \leqslant \|x\| \cdot \|p(x)\|$$

avec égalité si $(p(x), x)$ liée i.e. $x \in \mathrm{Im}(p)$.
On en déduit que $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (même cas d'égalité). On a aussi $(p(x)|x) = (p(p(x))|x) = \|p(x)\|^2$. Ainsi $0 \leqslant (p(x)|x) \leqslant \|x\|^2$. Il en va de même pour q.
Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On a

$$\lambda\|x\|^2 = (u(x)|x) = (p(x)|x) + (q(x)|x) \in [0, 2\|x\|^2]$$

On en déduit que $\lambda \leqslant 2$. Les valeurs propres de u sont donc dans $[0,2]$.

2.4. Si $u(x) = 2x$ alors on est dans le cas d'égalité évoqué ci-dessus pour p et q et donc $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. La réciproque est immédiate et

$$\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{I}d) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$$

Supposons maintenant que $u(x) = x$. On a alors $x = p(x) + q(x)$. Ainsi $q(x) = x - p(x) \in \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$ et de même $p(x) = x - q(x) \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Comme $x = p(x) + q(x)$, on a donc $x \in (\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)) + (\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(q))$.
Réciproquement, si x est élément de l'ensemble de droite, on vérifie que $u(x) = x$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}d) = (\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)) + (\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(q))$$

D. Concours Centrale – Supélec

Planche D1 — Centrale 1 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on pose $[\mathrm{U},\mathrm{V}] = \mathrm{UV} - \mathrm{VU}$.

1. Pour $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, montrer que $\mathrm{Tr}([\mathrm{U},\mathrm{V}]) = 0$.

2. Réciproquement, on se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$, le but est de prouver qu'il existe $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{A} = [\mathrm{U},\mathrm{V}]$.

2.1. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui vérifie que $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in \mathrm{E}$, prouver que f est un homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $u = a\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

2.2. En déduire que A est semblable à une matrice $\mathrm{R_A}$ par blocs de la forme :

$$\mathrm{R_A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L} \\ \mathrm{C} & \mathrm{A}' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C}),\ \mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})\ \mathrm{A}' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$$

et où $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}') = 0$.

2.3. Pour $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_n$ soit inversible.
On définit des matrices par blocs sous le même format que la matrice $\mathrm{R_A}$ en posant :

$$\mathrm{R_U} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{U}' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{R_V} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X} & \mathrm{V}' \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathrm{R_U R_V} - \mathrm{R_V R_U}$.

2.4. Conclure par rapport au problème posé.

Solution

1. C'est immédiat par linéarité de la trace et le fait que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BA})$ si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

2. 2.1. On commence par prouver que pour tout $x \in \mathrm{E}$ il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.
Puisque $(x, u(x))$ est liée, il existe $(a,b) \neq (0,0)$ tel que $ax + bu(x) = 0$.

- Si $b \neq 0$ on a alors $u(x) = (-a/b)x$ comme souhaité.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on a $ax = 0$ soit $x = 0$. Dans ce cas, on peut trivialement écrire que $u(x) = u(0) = 0 = 0 \cdot x$ et on a encore le résultat souhaité.

On fixe $x_0 \in \mathrm{E}$ non nul. On se donne alors $x \in \mathrm{E}$ non nul également. Deux cas se présentent :

- Si la famille (x, x_0) est liée, on peut écrire $ax + bx_0 = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. On a forcément $a \neq 0$ car sinon $bx_0 = 0$ avec $b \neq 0$ et $x_0 \neq 0$. On peut donc écrire $x = (-b/a)x_0 = \mathrm{K}x_0$. Il vient alors $u(x) = u(\mathrm{K}x_0) = \mathrm{K}u(x_0) = \mathrm{K}\lambda_{x_0}x_0$. Mais on a aussi $u(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mathrm{K}x_0$. Ainsi $\mathrm{K}\lambda_{x_0}x_0 = \lambda_x\mathrm{K}x_0$. Comme $x_0 \neq 0$ on a $\mathrm{K}\lambda_{x_0} = \lambda_x\mathrm{K}$. Si $\mathrm{K} = 0$ alors $b = 0$ ce qui donnerait $ax = 0$ avec $a \neq 0$ et $x = 0$, c'est exclu. Ainsi $\mathrm{K} \neq 0$ et il vient bien $\lambda_{x_0} = \lambda_x$.
- Si la famille (x, x_0) est libre, on a $u(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0$. Mais on a également $u(x + x_0) = u(x) + u(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$. Ainsi $\lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0 = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$ et par liberté de (x, x_0) il vient $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$, ce qui donne ce que l'on souhaitait.

Dans tous les cas, on a bien montré $\lambda_x = \lambda_{x_0}$. Ainsi, on pose $a = \lambda_{x_0}$ et on a prouvé que $u(x) = ax$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ non nul. Comme $u(0) = 0 = \lambda 0$, cette relation est aussi vérifiée en 0 et u est bien une homothétie.

2.2. Si A est nulle, le résultat est trivial avec $\mathrm{L} = \mathrm{C} = \mathrm{A}' = 0$. On suppose maintenant $\mathrm{A} \neq 0$. Si jamais on avait $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_n$ avec $a \in \mathbb{C}$, on aurait en prenant la trace dans cette relation que $na = 0$ et donc que $a = 0$. Ainsi on obtiendrait $\mathrm{A} = 0$, ce qui est exclu. Ainsi, par contraposée du résultat de la question précédente, en notant u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, u(x_0))$ soit libre. On complète alors cette famille en une base $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), e_3, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Dans cette base, la matrice de u prend la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & * \\ \vdots & * & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

On peut bien mettre cette matrice sous la forme souhaitée par l'énoncé. Deux matrices semblables ayant même trace et le coefficient en haut à gauche de la matrice précédente étant nul, on trouve bien que $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A) = 0$.

2.3. La matrice $U - \alpha I_n$ est inversible si et seulement si $\alpha I_n - U$ l'est. Or le déterminant de cette dernière matrice est $\chi_U(\alpha)$. Le polynôme caractéristique de U étant un polynôme de degré n, il a au plus n racines. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_U(\alpha) \neq 0$, ce qui donne l'inversibilité de $\alpha I_n - U$ et donc celle de $U - \alpha I_n$.
Enfin, après calculs par blocs, on obtient :

$$R_U R_V - R_V R_U = \begin{pmatrix} 0 & Y(\alpha I_{n-1} - U') \\ (U' - \alpha I_{n-1})X & U'V' - V'U' \end{pmatrix}$$

2.4. On procède par récurrence sur la taille $n \in \mathbb{N}^*$ de la matrice A. L'initialisation est claire puisqu'une matrice de taille 1 de trace nulle est nulle et s'écrit $A = 0 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0$.
On suppose maintenant le résultat vrai au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$ et on va le prouver au rang n. On se donne donc une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle. Grâce à la question **2.2**, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PR_AP^{-1}$. La sous-matrice A' de R_A est de taille $n-1$ et est de trace nulle. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et l'écrire $A' = U'V' - V'U'$ avec $(U', V') \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})^2$.
On utilise le début de la question **2.3** pour obtenir $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $U' - \alpha I_{n-1}$ soit inversible. On pose alors $X = (U' - \alpha I_{n-1})^{-1}C$ et $Y = L(\alpha I_{n-1} - U')^{-1}$ et on définit les matrices R_U et R_V comme à la question **2.3**.
On remarque grâce au calcul effectué à la fin de la question **2.3** que $R_U R_V - R_V R_U = R_A$. Il suffit alors de poser $U = PR_UP^{-1}$ et $V = PR_VP^{-1}$ et on peut vérifier que l'on a $UV - VU = A$.

Planche D2 — Centrale 1 2023

On pose sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1} + t + 1}$$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est dérivable sur D et donner sa dérivée.
3. Donner des équivalents de F aux bornes de D.
4. Proposer une méthode pour calculer F(1).

Solution

1. La fonction $f : t \mapsto 1/(t^{x+1} + t + 1)$ est continue sur $[1, +\infty[$. Il reste à étudier la convergence de l'intégrale au voisinage de $+\infty$, ce que l'on fait par équivalent avec le théorème de comparaison puisque f est positive.
   - Si $x + 1 \leqslant 0$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t$
   - Si $0 < x + 1 < 1$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t^{x+1}$
   - Si $x + 1 = 1$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/(2t)$
   - Si $x + 1 > 1$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t^{x+1}$

   On en déduit finalement, par comparaison avec des intégrales de Riemann, que $F(x)$ existe si et seulement si $x + 1 > 1$, c'est-à-dire que $D = \mathbb{R}_+^*$.
2. On note, pour $t \geqslant 1$ et $x > 0$, $f(t, x)$ l'intégrande de F et on utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre :
   - Pour $t \geqslant 1$, $x \mapsto f(t, x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur D ;
   - Pour $x > 0$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (question précédente) ;
   - Pour $x > 0$, $t \mapsto \partial f(t, x)/\partial x$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$;
   - Pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $t \geqslant 1$:

   $$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| = \left|-\frac{t^{x+1} \ln t}{(t^{x+1} + t + 1)^2}\right| \leqslant \frac{t^{b+1} \ln t}{(t^{a+1} + t + 1)^2}$$

   Ce majorant est continu par morceaux sur $[1, +\infty[$ et intégrable puisque équivalent à $(\ln t)/t^{2a+1-b}$ qui est lui-même intégrable à l'aide d'un critère de Riemann si $2a + 1 - b > 1$, c'est-à-dire si $2a > b$. On suppose donc que $a < b < 2a$ pour que la condition précédente soit vérifiée.

On obtient la classe $\mathscr{C}^1$ de F sur chaque segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ avec $a < b < 2a$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. La dérivée est donnée, pour $x > 0$, par :

$$\mathrm{F}'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{t^{x+1}\ln t \,\mathrm{d}t}{(t^{x+1}+t+1)^2}$$

3. On réalise le changement de variable $u = t^x$ dans l'expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > 0$, changement de variable $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u+u^{1-\frac{1}{x}}}$$

Par utilisation du théorème de convergence dominée, on peut prouver que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u+u^{1-\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2u} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+2)} = \frac{\ln 3}{2}$$

où la dernière intégrale a été calculée à l'aide d'une décomposition en éléments simples. Les hypothèses classiques du théorème de convergence dominée ne posent aucun problème, et une domination possible est la suivante :

$$\forall u \geqslant 1, \quad \left|\frac{1}{u^2+u+u^{1-\frac{1}{x}}}\right| \leqslant \frac{1}{u^2+u}$$

qui est bien une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit :

$$\mathrm{F}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 3}{2x}$$

On procède de façon parfaitement équivalente en 0^+ et on trouve :

$$\mathrm{F}(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u} = \frac{\ln 2}{x}$$

4. Pour calculer l'intégrale $\mathrm{F}(1)$, on commence par écrire au dénominateur de l'intégrande, pour $t \geqslant 1$, que $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, et on factorise ensuite par $3/4$. On peut alors directement calculer l'intégrale par crochet généralisé en intégrant à l'aide de la fonction Arctan. On trouve $\mathrm{F}(1) = \pi/(3\sqrt{3})$.

Planche D3 — Centrale 2023

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - v_n \quad \text{avec} \quad v_0 = \frac{\pi}{4}$$

1. **1.1.** Écrire une fonction `Python` qui pour $n \in \mathbb{N}$ donné renvoie les $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Faire de même pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   1.2. Conjecturer une relation entre les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la prouver.
   1.3. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_{2n}$.
   2.1. Déterminer une relation entre les termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la quantité :
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}, \quad n \in \mathbb{N}$$
   2.2. Calculer la somme suivante :
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$
3. **3.1.** Déterminer le rayon de convergence des deux séries entières suivantes :
   $$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$$

3.2. Calculer la somme de la série de la question **2.2** à l'aide de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n+3)}$$

Solution

1. 1.1.

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as integr

def I(n) :
    def f(t) :
        return t**(2*n)/(1+t**2)
    return integr.quad(f, 0, 1)[0]

def U(n) :
    return [ I(k) for k in range(0,n+1) ]

def V(n) :
    R = [ np.pi/4 ]
    for k in range(n) :
        R += [ 1/(2*k+1)-R[-1] ]
    return R

print(U(5))
print(V(5))

# Il semble que u_n = v_n pour tout n...
```

1.2. Il semble numériquement que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce que l'on va maintenant démontrer. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on écrit :

$$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n}[(1+t^2)-1]}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1} - u_n$$

De plus, on a directement que $u_0 = \pi/4 = v_0$. Ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1 et ont le même premier terme : elles sont donc égales.

1.3. D'après la question précédente, la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

Par encadrement, cela donne que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et il en est de même pour v_n.

2. 2.1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{2n+2} = \frac{1}{2(2n+1)+1} - v_{2n+1} &= \frac{1}{4n+3} - \left(\frac{1}{2(2n)+1} - v_{2n}\right) \\ &= \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+1} + w_n \\ &= -\frac{2}{(4n+1)(4n+3)} + w_n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(w_{k+1}-w_k) = -\frac{1}{2}(w_{n+1}-w_0)$$

2.2. On note S la somme cherchée. Elle est égale, sous réserve de convergence, à la limite de la suite des sommes partielles associée. D'après la question précédente, et étant donné que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après la question **1**, on a :

$$\mathrm{S} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} w_n - w_0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

3. 3.1. Par application du critère de d'Alembert, on trouve aisément que le rayon de convergence de ces deux séries entières est 1.

3.2. On fixe $x \in]-1,1[$. Grâce à la question précédente, on peut poser :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$$

Par décomposition en éléments simples, on a alors, pour $x \in]0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+3)} = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2x^2}G(x)$$

Par dérivation puis primitivation, on peut facilement calculer $F(x)$ et $G(x)$ pour $x \in]0,1[$. On trouve :

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x \qquad \text{et} \qquad G(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$$

Enfin, on démontre facilement que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} x^{4n+1}/[(4n+1)(4n+3)]$ est normalement convergente que $[0,1]$ puisque son terme général est majoré par $1/[(4n+1)(4n+3)]$, terme général d'une série convergente puisque équivalent à $1/(16n^2)$. Ainsi, la somme T de cette série entière est définie et continue sur $[0,1]$. On en déduit facilement, par continuité de T en 1 et grâce aux expressions de F et G trouvées ci-dessus pour $x \in]0,1[$:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n+3)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2x^2}G(x)\right) = \frac{\pi}{8}$$

Planche D4 — Centrale 2 2023

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On pose :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$$

1. Écrire une fonction `Python` qui à deux matrices A et B renvoie $A \otimes B$.
   On pourra utiliser la fonction `concatenate` de `Numpy`.
   Tester la fonction sur des matrices de petites tailles.
2. Soient A, B, C, D quatre matrices telles que les matrices AB et CD aient un sens. Pour des petites valeurs de n et avec des matrices créées par vos soins, calculer $(AB)\otimes(CD)$ puis $(A\otimes C)(B\otimes D)$.
   Conjecturer un résultat général et le démontrer.
3. Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{C})$. Montrer que $P\otimes Q \in GL_{np}(\mathbb{C})$.
   En déduire que : $(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes Q) = (P^{-1}AP)\otimes(Q^{-1}BQ)$.
4. Soient $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Exprimer $\chi_{\alpha B}$ en fonction de χ_B.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Exprimer $\chi_{A\otimes B}$.
6. Grâce à `Python`, émettre une conjecture sur les valeurs propres de $A \otimes B$.
   La démontrer.

Solution

1.
```python
import numpy as np

A = np.array([[1,2],[3,4]])
B = np.array([[4,5,6],[7,8,9],[10,11,12]])

def Tensoriel(A,B) :
    # Première ligne de A x B
    L = A[0,0]*B
    for j in range(1,len(A)):
        L = np.concatenate((L,A[0,j]*B),axis=1)
```

```python
    R = np.copy(L)
     # Autres lignes
    for i in range(1,len(A)):
        L = A[i,0]*B
        for j in range(1,len(A)):
            L = np.concatenate((L,A[i,j]*B),axis=1)
        R = np.concatenate((R,L),axis=0)
    return R

Tensoriel(A,B)
```

2.
```python
A = np.array([[1,2],[3,4]])
B = np.array([[6,-2],[0,1]])
C = np.array([[1,-3],[-2,3]])
D = np.array([[0,3],[1,1]])

print(Tensoriel(np.dot(A,B),np.dot(C,D)))
print(np.dot(Tensoriel(A,C),Tensoriel(B,D)))
# C’est égal !
```

Dans le cas général, pour prouver l'égalité des deux termes, on effectue le produit par blocs de $A \otimes C$ avec $B \otimes D$ et on reconnaît immédiatement $(AB) \otimes (CD)$.

3. On utilise le résultat précédent avec $A = P$, $B = P^{-1}$, $C = Q$ et $D = Q^{-1}$. Cela donne la relation suivante : $(P\otimes Q)(P^{-1}\otimes Q^{-1}) = (PP^{-1})\otimes(QQ^{-1}) = I_n\otimes I_p = I_{np}$. Ainsi $P\otimes Q$ est bien inversible et son inverse est $(P^{-1}\otimes Q^{-1})$. En utilisant l'expression de l'inverse de $P \otimes Q$ et deux fois la règle de calcul de la question **2**, on arrive au résultat souhaité pour la fin de cette question **3**.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On trouve immédiatement, si $\alpha \neq 0$, par définition d'un polynôme caractéristique :

$$\chi_{\alpha B}(\lambda) = \det(\lambda I_p - \alpha B) = \alpha^p \det\left(\frac{\lambda}{\alpha} I_p - B\right) = \alpha^p \chi_B\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

Si $\alpha = 0$, on a $\chi_{\alpha B}(\lambda) = \lambda^n$.

5. Si A est triangulaire supérieure, $A \otimes B$ est triangulaire supérieure par blocs. Par propriété de calcul sur les déterminants de matrices triangulaires par blocs, on obtient donc, pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\chi_{A\otimes B}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{a_{i,i}B}(\lambda)$$

Cette expression peut être détaillée avec la question précédente en distinguant les coefficients $(a_{i,i})$ nuls et ceux qui ne le sont pas.

6.
```python
import numpy.linalg as alg

print(alg.eigvals(Tensoriel(A,B)))
print(alg.eigvals(A))
print(alg.eigvals(B))
# On remarque les valeurs propres de A X B sont les lambda_a x lambda_b avec lambda_a et
# lambda_b valeurs propres de A et B
```

Pour démontrer ce résultat, on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ les valeurs propres comptées avec multiplicité de A et B. Sur $\mathbb{C}$, A est trigonalisable, on peut écrire $P^{-1}AP = T$ avec P une matrice inversible de taille n et T une matrice triangulaire de taille n avec les $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sur la diagonale. En utilisant la formule de la question **3** (avec $Q = I_p$), on obtient que $A \otimes B$ est semblable à $T \otimes B$. En particulier ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres. Le polynôme caractéristique de $T \otimes B$ peut être calculé grâce à la question précédente :

$$\chi_{T\otimes B} = \prod_{i=1}^{n} \chi_{\lambda_i B}$$

On suppose que les valeurs propres nulles de A sont les $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (avec $k = 0$ si jamais 0 n'est pas valeur propre de A). Avec la question **5**, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on obtient donc :

$$\chi_{T\otimes B}(\lambda) = \lambda^{nk} \prod_{i=k+1}^{n} \lambda_i^p \chi_B\left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)$$

Avec cette expression, on en déduit immédiatement les racines de $\chi_{T\otimes B}$, à savoir les valeurs propres de $T\otimes B$ et donc celles de $A\otimes B$:

$$\mathrm{sp}(A\otimes B) = \left\{\lambda_i\mu_j,\ \ (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\right\}$$

Planche D5 — Centrale 2023

Pour $n \geqslant 2$, on définit la matrice C_n de coefficients $(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donnés par :

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `Python` permettant de donner C_n.
2. Calculer C_n^n pour $n\in[\![1,10]\!]$.
   Conjecturer un résultat et le prouver.
3. La matrice C_n est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?
4. Prouver que 1 est toujours valeur propre de C_n.
5. Calculer ${C_n}^{T}C_n$ pour $n\in[\![1,10]\!]$.
   Conjecturer un résultat et le prouver.
6. Montrer que tout vecteur propre de C_n est vecteur propre de ${C_n}^{T}$ et préciser la valeur propre associée.
7. Déterminer l'espace propre $E_1(C_n)$.

Solution

1.
```python
import numpy as np

def Cn(n):
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n-1):
        A[i,i+1]=1
    A[n-1,0]=1
    return A

print(Cn(6))
```

2.
```python
def Puissance(A,k):
    if k == 0 :
        return np.eye(len(A))
    else :
        Am = np.copy(A)
        for i in range(k-1):
            A = np.dot(A,Am)
        return A

for n in range(1,11):
    print(Puissance(Cn(n),n))

# Il semble que C_n^n = I_n
```

Nous allons prouver que $C_n^n = I_n$ pour tout $n\geqslant 2$. On note f l'endomorphisme de R^n canoniquement associé à la matrice C_n et $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par lecture de la matrice, on a donc $f(e_1) = e_n$ et $f(e_i) = e_{i-1}$ pour $i\in[\![2,n]\!]$. Par itération, on a directement $f^p(e_i) = e_{i-p}$ pour $p\in[\![0,i-1]\!]$ et $i\in[\![2,n]\!]$. Dès lors, on peut écrire :

- Pour $i\in[\![2,n]\!]$, on a $f^{i-1}(e_i) = e_1$ puis $f^n(e_i) = f^{n-i+1}(f^{i-1}(e_i)) = f^{n-i+1}(e_1) = f^{n-i}(e_n) = e_{n-(n-i)} = e_i$;
- Pour $i = 1$, on a $f^n(e_i) = f^n(e_1) = f^{n-1}(e_n) = e_{n-(n-1)} = e_1 = e_i$.

On a donc prouvé que $f^n(e_i) = e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire que $f^n = \mathrm{id}$ soit $C_n^n = I_n$.

3. La question précédente montre que $P_n(X) = X^n - 1$ est annulateur de C_n. Ce polynôme étant scindé à racines simples que $\mathbb{C}$, C_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Sur $\mathbb{R}$, on sait que le spectre de C_n est inclus dans les racines de P_n, ce qui donne 1 comme unique valeur propre possible. Dès lors, si C_n était diagonalisable, elle serait égale à I_n, ce qui n'est pas le cas.
4. On observe que le vecteur $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1 vérifie $C_n U = U$. Le vecteur U étant non nul, cela permet d'assurer que 1 est valeur propre de C_n.
5.
```
for n in range(1,11):
    C = Cn(n)
    print(np.dot(np.transpose(C),C))

# Il semble que C_n^T C_n = I_n
```
On va prouver que ${C_n}^T C_n = I_n$ pour tout $n \geqslant 2$. Pour ce faire, on peut remarquer que les colonnes de C_n forment à l'ordre près la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique. Ainsi la matrice C_n est orthogonale et vérifie donc ${C_n}^T C_n = I_n$.
6. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de C_n. On a donc $C_n X = \lambda X$. Ainsi ${C_n}^T C_n X = X$ grâce à la relation de la question précédente. Cela donne ${C_n}^T \lambda X = X$ et donc ${C_n}^T X = \frac{1}{\lambda} X$ (il faut remarquer que λ ne peut être nulle puisque par la question **3**, les valeurs propres de C_n sont incluses dans l'ensemble des racines n−èmes de l'unité). Ainsi X est aussi vecteur propre de ${C_n}^T$ et est associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.
7. La résolution de $C_n X = X$ donne immédiatement que toutes les coordonnées de X sont égales. Ainsi $E_1(C_n) = \mathrm{Vect}(U)$ où U est le vecteur introduit à la question **4**.

Planche D6 — Centrale 2023

Une matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite centro-symétrique si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $c_{i,j} = c_{n+1-i,n+1-j}$. Dans la suite, on travaillera avec la matrice $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Une matrice centro-symétrique est-elle symétrique ?
2. Écrire une fonction `Python` permettant de tester si une matrice est centro-symétrique.
3. Montrer que si C est centro-symétrique alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $c_{i,n+1-j} = c_{n+1-i,j}$.
4. Prouver que C est centro-symétrique si et seulement si $CS = SC$.
   En déduire une nouvelle fonction `Python` permettant de tester si une matrice est centro-symétrique.
5. Si A et B sont centro-symétriques, prouver que AB l'est aussi.
   Si A est de plus inversible, montrer que A^{-1} l'est également.
6. Montrer que l'ensemble des matrices centro-symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

Solution

1. La matrice $E_{1,1} + E_{1,2} + E_{n-1,n} + E_{n,n}$ est centro-symétrique mais pas symétrique.
2.
```
import numpy as np

def Test(A):
    n = len(A)
    Resultat = True
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A)):
            Resultat = (A[i,j] == A[n-1-i,n-1-j])
            if not(Resultat):
```

```
            break
        if not(Resultat):
            break
    return Resultat

A = np.ones((5,5))
B = np.copy(A)
B[1,1]=2
C = np.copy(B)
C[3,3]=2
# A est CS, B ne l'est pas, C l'est.
# On vérifie :

print(Test(A))
print(Test(B))
print(Test(C))
```

3. C'est une conséquence immédiate de la définition. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a :

$$c_{i,n+1-j} = c_{n+1-i,n+1-(n+1-j)} = c_{n+1-i,j}$$

4. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On commence par calculer les coefficients d'indices (i, j) des matrices CS et SC :

$$(\mathrm{CS})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}s_{k,j} = c_{i,n+1-j} \qquad \text{et de même} \qquad (\mathrm{SC})_{i,j} = c_{n+1-i,j}$$

Avec la question précédente, si C est centro-symétrique, elle vérifie $c_{i,n+1-j} = c_{n+1-i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, c'est-à-dire $(\mathrm{CS})_{i,j} = (\mathrm{SC})_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et donc CS = SC.
Réciproquement, si CS = SC, on a $(\mathrm{CS})_{i,j} = (\mathrm{SC})_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, c'est-à-dire $c_{i,n+1-j} = c_{n+1-i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ d'où l'on déduit facilement que C est centro-symétrique avec une justification ressemblant à celle de la question **3**

```
def Test2(A):
    n = len(A)
    S = np.zeros((n,n))
    for j in range(n):
        S[n+1-j,j]=1
    return np.dot(C,S) == np.dot(S,C)

# On vérifie :

print(Test(A))
print(Test(B))
print(Test(C))
```

5. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices centro-symétriques. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{C}^2$. On utilise la caractérisation de la question précédente, on sait que AS = SA et BS = SB de sorte que ABS = ASB = SAB et AB est bien centro-syémtrique. Si A est en plus inversible, on part de la relation AS = SA et en multipliant par A^{-1} à gauche et à droite, on obtient $\mathrm{SA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{S}$ et A^{-1} est bien centro-symétrique.

6. Le fait que $\mathscr{C}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ se prouve facilement par caractérisation des sous-espaces vectoriels ($\mathrm{I}_n \in \mathscr{C}$ et si $(\mathrm{A},\mathrm{B},\lambda) \in \mathscr{C}^2 \times \mathbb{C}$, on a $(\lambda\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{S} = \lambda\mathrm{AS}+\mathrm{BS} = \lambda\mathrm{SA}+\mathrm{SB} = \mathrm{S}(\lambda\mathrm{A}+\mathrm{B})$, ce qui prouve la stabilité par combinaison linéaire de $\mathscr{C}$ grâce au critère de la question **4**). Il reste à trouver la dimension de $\mathscr{C}$. On doit distinguer les cas n pair et n impair et on prouve facilement que :

- Si n est pair :

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\mathrm{E}_{i,j},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j > i\right\} \cup \left\{\mathrm{E}_{i,i},\ i \in [\![1, \tfrac{n}{2}]\!]\right\}\right) \qquad \text{donc} \qquad \dim(\mathscr{C}) = \frac{n^2}{2}+1$$

- Si n est impair :

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\mathrm{E}_{i,j},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j > i\right\} \cup \left\{\mathrm{E}_{i,i},\ i \in [\![1, \tfrac{n+1}{2}]\!]\right\}\right) \qquad \text{donc} \qquad \dim(\mathscr{C}) = \frac{n^2+1}{2}$$

Planche D7 — Centrale 1 2022

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On se donne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0,1]$ tendant vers 0 en $+\infty$. On définit ensuite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant $u_0 \in [0,1]$ et en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a_n f(u_n) + (1-a_n)u_n$$

1. Donner la nature de la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(\ell) \neq \ell$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

Solution

1. On peut facilement prouver par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (l'initialisation est claire et, pour l'hérédité, si $u_n \in [0,1]$, $f(u_n) \in [0,1]$ également et u_{n+1} est alors bien dans $[0,1]$ en tant que combinaison convexe de u_n et $f(u_n)$). Dès lors, on a $u_n \in [0,1]$ et $f(u_n) \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-u_n| = a_n \left|f(u_n)-u_n\right| \leqslant a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Par encadrement, on conclut que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Avec la majoration précédente, puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, on obtient par comparaison que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument et donc converge. Cela équivaut par propriété de cours (lien suite – série) à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(\ell)$ par continuité de f. Comme $f(\ell)\neq\ell$, la quantité $f(u_n)-u_n$ est donc non nulle à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. On peut alors écrire pour $n \geqslant p$:

$$a_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{f(u_n)-u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{f(\ell)-\ell}(u_{n+1}-u_n)$$

   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge (lien suite – série) de sorte que, par comparaison, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge bien.

Planche D8 — Centrale 2 2019

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré au moins 1 tel que P ne possède pas de racine de module 1.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln(|\mathrm{P}(e^{it})|)\,\mathrm{d}t$ existe. On la note M(P).
2. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}^*$, $m_1,\dots,m_s \in \mathbb{N}^*$ et $z_1,\dots,z_s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$ tels que :

$$\mathrm{M(P)} = \mathrm{A} + \sum_{k=1}^{s} m_k \mathrm{M}(\mathrm{X}-z_k)$$

3. Écrire en Python, une fonction `Mahler`(r,θ) qui renvoie $\mathrm{M}(\mathrm{X}-re^{i\theta})$. Calculer `Mahler`(2,50).
   Tracer, pour r fixé, la fonction $\theta \mapsto$ `Mahler`(r,θ) pour différentes valeurs de θ espacées de 0.01.
   Quelle conjecture peut-on faire?
4. Tracer, pour θ fixé, la fonction $r \mapsto$ `Mahler`(r,θ) pour $r \in \{0,2,3,5,10\}$.
   Quelle conjecture peut-on émettre?
5. Montrer la conjecture de la question **3**.
6. Montrer la conjecture de la question **4**.

Solution

1. $t \mapsto \ln(|\mathrm{P}(e^{it})|)$ est continue par composition de fonctions continues ($t \mapsto \mathrm{P}(e^{it})$ ne s'annule pas par hypothèse) sur le segment $[0,2\pi]$, donc l'intégrale est bien définie.

2. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ tels que

$$\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{s} (\mathrm{X} - z_k)^{m_k}.$$

On a alors

$$\mathrm{M}(\mathrm{P}) = \int_0^{2\pi} \left(\ln(|\lambda|) + \sum_{k=1}^{s} m_k \ln(|e^{it} - z_k|) \right) dt = 2\pi \ln(|\lambda| + \sum_{k=1}^{s} m_k \mathrm{M}(\mathrm{X} - z_k).$$

3.

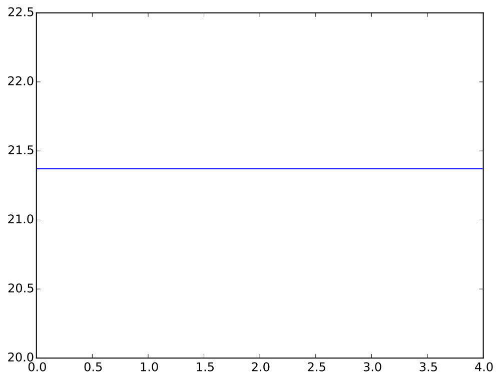
```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integr

def f(t):
        return(np.log(abs(np.cos(t)+np.sin(t)*1j-r*(np.cos(theta)+np.sin(theta)*1j))))

def Mahler(r,theta):
        return(integr.quad(f,0,2*np.pi)[0])

def graphe(r):
        X=[k*0.01 for k in range(400)]
        Y=[Mahler(r,x) for x in X]
        plt.plot(X,Y)
        plt.show()
```

L'appel de `graphe(30)` donne

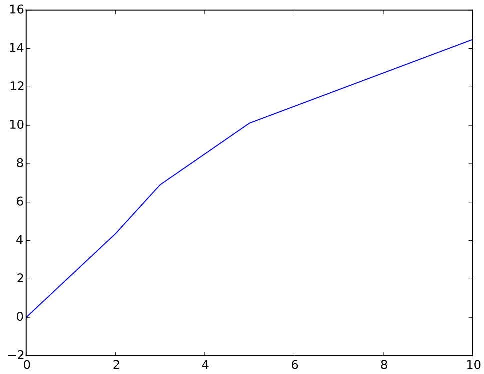


On peut conjecturer que Mahler(r, θ) ne dépend pas de θ. D'autres valeurs de r (supérieures à 15) donnent aussi un graphe constant, mais la valeur de la constante semble dépendre de r.

4.

```
def graphebis(theta):
X=[0,2,3,5,10]
Y=[Mahler(r,theta) for r in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

L'appel de `graphe(50)` donne



On peut conjecturer que `Mahler`(r,θ) renvoie $2\pi\ln(r)$, pour $r>1$.

5. Soit $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}\times\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{I}(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\ln(|\mathrm{P}(e^{it})|)\,dt$. Après calcul du module, on trouve $\mathrm{I}(r,\theta)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1+r^2-2r\cos(t-\theta))\,dt$. La fonction sous l'intégrale étant 2π-périodique, toutes ses intégrales sur un segment de longueur 2π sont égales et donc le changement de variable $u=t-\theta$ permet de dire que

$$\mathrm{I}(r,\theta)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1+r^2-2r\cos(t))\,dt$$

et donc ne dépend pas de θ.

6. Notons $\mathrm{I}(r)$ la dernière intégrale obtenue. I est une intégrale à paramètre vis à vis de r. On lui applique le théorème de dérivation. Pour $r\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, $t\mapsto\ln(1+r^2-2r\cos(t))$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$ et donc elle y est aussi intégrable. Pour $t\in[0,2\pi]$, $r\mapsto\ln(1+r^2-2r\cos(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Pour $r\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, $t\mapsto\frac{2r-2\cos(t)}{1+r^2-2r\cos(t)}$ est continue. Enfin, pour $[a,b]\subset]1,+\infty[$ (resp. $[a,b]\subset[0,1[$), on a pour $r\in[a,b]$ et $t\in[0,2\pi]$, $\left|\frac{2r-2\cos(t)}{1+r^2-2r\cos(t)}\right|\leqslant\frac{2(1+b)}{(1-r)^2}$ et on peut majorer cette quantité par $\frac{2(1+b)}{(1-a)^2}$ (resp. $\frac{2(1+b)}{(1-b)^2}$). Ces constantes sont bien intégrables sur $[0,2\pi]$. On obtient ainsi que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et que pour r dans cette union d'intervalle, on a $\mathrm{I}'(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2r-2\cos(t)}{1+r^2-2r\cos(t)}\,dt$.
Par décomposition en éléments simples, on trouve alors, pour $r>1$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}'(r)&=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{it}}{1-re^{it}}-\frac{1}{2}\frac{e^{-it}}{1-re^{-it}}\right)dt\\&=\frac{1}{2r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{e^{-it}}{r}}+\frac{1}{1-\frac{e^{it}}{r}}\right)dt\\&=\frac{1}{2r}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-int}+e^{int}}{r^n}\,dt\\&=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,dt.\end{aligned}$$

On a pu intervertir la somme et l'intégrale, car, à r fixé, la série de fonctions $\sum\left(t\mapsto\frac{\cos(nt)}{r^n}\right)$ converge normalement, donc uniformément sur le segment $[0,2\pi]$.
Or $\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,dt$ est nulle, sauf pour $n=0$ où elle vaut 2π, il reste donc $\mathrm{I}'(r)=\frac{2\pi}{r}$.
Il existe donc $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $r\in]1,+\infty[$, $\mathrm{I}(r)=2\pi\ln(r)+\mathrm{C}$. Or on a $\mathrm{I}(r)=\int_0^{2\pi}\ln(r)\,dt+\int_0^{2\pi}\ln(|e^{i\theta}-\frac{1}{r}e^{it}|)\,dt$ et il est facile de voir que cette dernière intégrale tend vers 0 en $+\infty$ en appliquant le théorème de convergence dominée (la fonction constante en $\ln(2)$ est une fonction de domination). On trouve donc $\mathrm{C}=0$ et finalement, $\mathrm{I}(r)=2\pi\ln(r)$ pour tout $r>1$.
Un calcul similaire donne I' nulle sur $[0,1[$, donc I est constante sur $[0,1[$ et comme $\mathrm{I}(0)=0$, I est nulle sur $[0,1[$.

Planche D9 — Centrale 1 2019

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$(t+1)y'' - 2y' - (t-1)y = te^{-t} \tag{L}$$

On note (H) l'équation homogène associée.

1. Montrer que (H) admet une solution sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Un logiciel de calcul donne que $\chi : t \mapsto (2t^2+6t+5)e^{-t}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (H) et que $\psi : t \mapsto (t+1)/2e^{-t}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (L).
   Donner la forme de l'ensemble des solutions de (H) et (L) sur $]-1,+\infty[$ notés $S_+(H)$ et $S_+(L)$.
3. Donner $S(H)$ et $S(L)$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) et de (L).

Solution

1. Si $t \mapsto e^{at}$ est solution de (H) alors $a=1$. On vérifie que $\varphi : t \mapsto e^t$ convient.
2. Le coefficient devant y'' ne s'annulant pas sur $]-1,+\infty[$, on sait, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, que $S_+(H)$ est un espace vectoriel de dimension 2. Comme φ et χ sont des éléments de $S_+(H)$, formant une famille libre, c'en est une base. Il vient, $S_+(H) = \mathrm{Vect}(\varphi,\chi)$.
   On sait aussi que $S_+(L)$ est un sous-espace affine de direction $S_+(H)$ et passant par ψ, d'où $S_+(L) = \psi + S_+(H) = \psi + \mathrm{Vect}(\varphi,\chi)$.
3. Soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$. f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à $]-1,+\infty[$ est dans $S_+(H)$: il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $t > -1$,
   $f(t) = ae^t + b(2t^2+6t+5)e^{-t}$. De même, il existe c et d dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $t<-1$, $f(t) = ce^t + d(2t^2+6t+5)e^{-t}$. Par ailleurs, en évaluant en -1, on trouve, $2y'(-1) - 2y(-1) = 0$.
   f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en -1. La limite à droite et la limite à gauche de f en -1 doivent être égale (à $f(-1)$). On trouve $a + be^2 = c + de^2$.
   f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la limite à droite et la limite à gauche de f' en -1 doivent être égale, on retrouve la même équation.
   Réciproquement, posons f la fonction définie par $(c+de^2-be^2)e^t + b(2t^2+6t+5)e^{-t}$ pour $t>-1$, $ce^t + d(2t^2+6t+5)e^{-t}$ pour $t<-1$ et qui vaut $\frac{c+de^2}{e}$ en -1.
   On a $f = bf_1 + c\varphi + df_2$, avec $f_1(t) = -e^{t+2} + (2t^2+6t+5)e^{-t}$ si $t>-1$ et 0 sinon et $f_2(t) = e^{t+2}$ si $t>-1$ et $(2t^2+6t+5)e^{-t}$ sinon.
   On vérifie que f_1 et f_2 sont solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.
   Finalement, $S(H) = \mathrm{Vect}(\varphi, f_1, f_2)$.
   Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. f est solution de (L) si et seulement si $f-\psi$ est solution de (H) et donc
   $$S(L) = \psi + \mathrm{Vect}(\varphi, f_1, f_2).$$

Planche D10 — Centrale 2019

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

1. Calculer P_i pour $i \in [\![1,8]\!]$.
2. Faire une conjecture et la démontrer.

   Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on pose :
   $$\psi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, P(t)Q(t)\,dt$$
3. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Pour $(i,j) \in [\![0,8]\!]^2$, calculer $\psi(P_i,P_j)$.
5. Conjecturer un résultat puis le démontrer. (On pourra faire le changement de variable $t = \cos\theta$.

   On définit maintenant $\Phi : P \mapsto -3XP' + (1-X^2)P''$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit M_n la matrice représentative de Φ restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Expliciter M_3, M_4 et M_5.
7. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ.
8. Que peut-on en déduire pour Φ?

Solution

1.

```
def Pol(n):
        L=[Polynomial([1]),Polynomial([0,2])]
        for i in range(2,n+1):
        Q=Polynomial([0,2])*L[i-1]-L[i-2]
        L.append(Q)
        return(L)
```

L'appel de `Pol(8)` renvoie

```
[Polynomial([ 1.], [-1,  1], [-1,  1]),
Polynomial([ 0.,  2.], [-1,  1], [-1,  1]),
Polynomial([-1.,  0.,  4.], [-1.,  1.], [-1.,  1.]),
Polynomial([ 0., -4.,  0.,  8.], [-1.,  1.], [-1.,  1.]),
Polynomial([  1.,   0., -12.,   0.,  16.], [-1.,  1.], [-1.,  1.]),
Polynomial([  0.,   6.,   0., -32.,   0.,  32.], [-1.,  1.], [-1.,  1.]),
Polynomial([ -1.,   0.,  24.,   0., -80.,   0.,  64.], [-1.,  1.], [-1.,  1.]),
Polynomial([   0.,   -8.,    0.,   80.,    0., -192.,    0.,  128.], [-1.,  1.], [-1.,
    1.]),
Polynomial([   1.,    0.,  -40.,    0.,  240.,    0., -448.,    0.,  256.], [-1.,  1.],
    [-1.,  1.])]
```

donc $P_2 = 4X^2 - 1$, $P_3 = 8X^3 - 4X$, $P_4 = 16X^4 - 12X + 1$, $P_5 = 32X^5 - 32X^3 + 6X$, $P_6 = 64X^6 - 80X^4 + 24X^2 - 1$, $P_7 = 128X^7 - 192X^5 + 80X^3 - 8X$ et $P_8 = 256X^8 - 448X^6 + 240X^4 - 40X^2 + 1$.

2. On conjecture que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n, son coefficients dominant est 2^n et a la parité de n.
On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$,
(H_n) : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$, le coefficient dominant de P_k est 2^k et $P_k(-X) = (-1)^k P_k$.
L'hypothèse est vraie pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. Montrons H_{n+1}.
Par hypothèse de récurrence, $P_n = 2^n X^n + R_n$ avec $\deg(R_n) \leqslant n-1$ et $\deg(P_{n-1}) \leqslant n-1$. Comme $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1} = 2X(2^n X^n + R_n) - P_{n-1} = 2^{n+1}X^{n+1} + (2XR_n - P_{n-1})$, vu que $\deg(2XR_n - P_{n-1}) \leqslant n$, on obtient bien que P_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^{n+1}.

$$P_{n+1}(-X) = -2XP_n(-X) - P_{n-1}(-X) = (-1)^{n+1}2XP_n - (-1)^{n-1}P_{n-1} = (-1)^{n+1}(2XP_n - P_{n-1}).$$

$P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}P_{n+1}$ et P_{n+1} a bien la même parité que $n+1$.

3. La symétrie de ψ est évidente.
La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale et de la symétrie.
La positivité découle de la positivité de l'intégrale.
Si P vérifie $\psi(P,P) = 0$, alors $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)^2 dt = 0$, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P(t)^2$ est positive, continue et d'intégrale nulle, donc le est identiquement nulle sur $[-1, 1]$. Alors P s'annule sur $]-1, 1[$ et donc possède une infinité de racines : $P = 0$.
ψ est bien un produit scalaire.

4.

```
import scipy.integrate as integr
import numpy as np

def f(x):
        return(p(x)*q(x)*np.sqrt(1-x**2))

def Psi(p,q):
        return(1/(2*np.pi)*integr.quad(f,-1,1)[0])

def ProScal(n):
```

```
        L=Pol(n)
        M=np.zeros((n+1,n+1))
        for i in range(n+1):
                for j in range(n+1):
                        M[i,j]=Psi(L[i],L[j])
        return(M)
```

L'appel de `ProScal(8)` donne

```
array([[  2.50000000e-01,   0.00000000e+00,  -3.90577295e-17, 0.00000000e+00,
-1.55999924e-16,   0.00000000e+00,-1.84441712e-15,   0.00000000e+00,  -1.10995091e-14],
[  0.00000000e+00,   2.50000000e-01,   0.00000000e+00, -1.63775889e-16,
0.00000000e+00,  -2.01873410e-15, 0.00000000e+00,  -1.31174344e-14,   0.00000000e+00],
[ -3.90577295e-17,   0.00000000e+00,   2.50000000e-01,0.00000000e+00,
-2.05344335e-15,   0.00000000e+00, -1.32781525e-14,   0.00000000e+00,  -3.82277210e-16],
[  0.00000000e+00,  -1.63775889e-16,   0.00000000e+00,2.50000000e-01,
0.00000000e+00,  -1.32874091e-14,0.00000000e+00,  -1.91505672e-16,   0.00000000e+00],
[ -1.55999924e-16,   0.00000000e+00,  -2.05344335e-15, 0.00000000e+00,
2.50000000e-01,   0.00000000e+00, -3.07056131e-16,   0.00000000e+00,  -1.62168810e-15],
[  0.00000000e+00,  -2.01873410e-15,   0.00000000e+00, -1.32874091e-14,
0.00000000e+00,   2.50000000e-01,0.00000000e+00,  -1.40056620e-15,   0.00000000e+00],
[ -1.84441712e-15,   0.00000000e+00,  -1.32781525e-14, 0.00000000e+00,
-3.07056131e-16,   0.00000000e+00,2.50000000e-01,   0.00000000e+00,  -6.29045910e-15],
[  0.00000000e+00,  -1.31174344e-14,   0.00000000e+00,-1.91505672e-16,
0.00000000e+00,  -1.40056620e-15,0.00000000e+00,   2.50000000e-01,   0.00000000e+00],
[ -1.10995091e-14,   0.00000000e+00,  -3.82277210e-16,0.00000000e+00,
-1.62168810e-15,   0.00000000e+00,-6.29045910e-15,   0.00000000e+00,   2.50000000e-01]])
```

On conjecture que la famille (P_n) est orthogonale.
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m < n$. Montrons que $\psi(P_m, P_n) = 0$.

$$\psi(P_m, P_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P_m(t)P_n(t)\,dt = \int_0^{\pi} \sin^2(\theta)P_m(\cos(\theta))P_n(\cos(\theta))\,d\theta$$

avec le changement de variable $t = \cos(\theta)$. On montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sin(\theta)P_p(\cos(\theta)) = \sin((p+1)\theta)$. On a donc

$$\psi(P_m, P_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((m+1)\theta)\sin((n+1)\theta)\,d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} (\cos((m+n+2)\theta) + \cos((m-n)\theta))\,d\theta = 0.$$

5.

```
def Phi(P):
        Q=P.deriv()
        R=Q.deriv()
        return(Polynomial([0,-3])*Q+Polynomial([1,0,-1])*R)

def MatPhi(n):
        M=np.zeros((n+1,n+1))
        for j in range(n+1):
                l=[0 for k in range(j+1)]
                l[j]=1
                P=Phi(Polynomial(l))
        for i in range(j+1):
                M[i,j]=P.coef[i]
        return(M)
```

L'appel de `MatPhi(3)`, `MatPhi(4)` et `MatPhi(5)` donne :

```
array([[  0.,   0.,   2.,   0.],
[  0.,  -3.,   0.,   6.],
[  0.,   0.,  -8.,   0.],
[  0.,   0.,   0., -15.]])
array([[  0.,   0.,   2.,   0.,   0.],
[  0.,  -3.,   0.,   6.,   0.],
[  0.,   0.,  -8.,   0.,  12.],
[  0.,   0.,   0., -15.,   0.],
[  0.,   0.,   0.,   0., -24.]])
array([[  0.,   0.,   2.,   0.,   0.,   0.],
[  0.,  -3.,   0.,   6.,   0.,   0.],
[  0.,   0.,  -8.,   0.,  12.,   0.],
[  0.,   0.,   0., -15.,   0.,  20.],
[  0.,   0.,   0.,   0., -24.,   0.],
[  0.,   0.,   0.,   0.,   0., -35.]])
```

On conjecture que les valeurs propres de Φ sont les $-n^2+1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ou les $-n(n+2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que les les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles.
Utilisons Python pour conjecturer un vecteur directeur de chacune de ces droites.

```
import numpy.linalg as alg
```

L'appel de `alg.eig(MatPhi(3))`, `alg.eig(MatPhi(3))` et `alg.eig(MatPhi(3))` donne

```
(array([  0.,  -3.,  -8., -15.]),
array([[ 1.        ,  0.        , -0.24253563,  0.        ],
[ 0.        ,  1.        ,  0.        , -0.4472136 ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.9701425 ,  0.        ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.89442719]]))
(array([  0.,  -3.,  -8., -15., -24.]),
array([[ 1.        ,  0.        , -0.24253563,  0.        ,  0.04993762],
[ 0.        ,  1.        ,  0.        , -0.4472136 ,  0.        ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.9701425 ,  0.        , -0.5992514 ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.89442719,  0.        ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.79900187]]))
(array([  0.,  -3.,  -8., -15., -24., -35.]),
array([[ 1.        ,  0.        , -0.24253563,  0.        ,  0.04993762, 0.        ],
[ 0.        ,  1.        ,  0.        , -0.4472136 ,  0.        ,0.13143239],
[ 0.        ,  0.        ,  0.9701425 ,  0.        , -0.5992514 ,0.        ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.89442719,  0.        , -0.70097273],
[ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.79900187,0.        ],
[ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        ,  0.        , 0.70097273]]))
```

On reconnaît que les vecteurs propres proposés sont colinéaires aux P_n.
Il reste donc à prouver que le spectre de Φ est $\{-n(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, $E_{-n(n+2)}(\Phi) = \mathrm{Vect}(P_n)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $Q_n = \Phi(P_n) + n(n+2)P_n$.
Pour $\theta \in]0,\pi[$, on a

$$\sin(\theta)Q_n(\cos(\theta)) = -3\sin(\theta)\cos(\theta)P'_n(\cos(\theta)) + \sin^3(\theta)P''_n(cos(\theta)) + n(n+2)P_n(\cos(\theta)).$$

Or, en écrivant $\sin(\theta)P_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$ et en dérivant deux fois, on trouve $\sin(\theta)Q_n(\cos(\theta)) = 0$. Comme sin ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, il vient $Q_n(\cos(\theta)) = 0$ et Q_n s'annule sur $]-1,1[$, donc possède une infinité de racines et finalement $Q_n = 0$.
On a bien prouvé que P_n est un vecteur propre de Φ, associé à la valeur propre $-n(n+2)$.
L'étude de ϕ restreint à tous les $\mathbb{R}_n[X]$ montre que l'on a ainsi toutes les valeurs propres et tous les sous-espaces propres.

Soit Σ l'ensemble constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que u_1, $u_2 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \frac{1}{n}(2u_{n-1} + (n-2)u_{n-2})$$

On note $u(a,b)$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Sigma$ de premiers termes a et b.

1. Montrer que Σ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Que vaut $(u(a,a))_n$? Comment peut-on définir entièrement Σ ?
3. Pour $n \geqslant 2$, on note :

$$\mathrm{A}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

   Écrire une fonction `u(a,b,n)` qui retourne $(u(a,b))_n$.
   Écrire une fonction pour calculer $\mathrm{A}(n)$.
   Calculer $(u(1,3/2))_n - \mathrm{A}(n)$ pour $n \in [\![2,20]\!]$.
4. Soit f_u la somme de la série entière associée aux u_k, c'est-à-dire :

$$f_u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x^k$$

   Justifier que le le rayon de convergence R_u de la série entière est > 0.
5. Montrer que

$$\forall |x| < \mathrm{R}_u, \quad (x^2-1)f_u'(x) + 2f_u(x) = 2(u_1 - u_2)x - u_1$$

6. Montrer, si possible sans calcul, que $x \mapsto x/(1-x)$ est solution sur $]-1,1[$ de :

$$(x^2-1)y'(x) + 2y(x) = -1$$

7. Calculer f_u pour $u(1,3/2)$.
8. En déduire une expression de $(u(1,3/2))_n$ en fonction des termes $\mathrm{A}(k)$. Vérifier numériquement avec Python.

SOLUTION

1. Σ est non vide (contient la suite nulle), inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et assez clairement stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel.
   Soit $\Phi\ :\ u \in \Sigma \mapsto (u_1, u_2)$. Cette application est linéaire de Σ dans $\mathbb{R}^2$, injective (si $u_1 = u_2 = 0$, on prouve par récurrence que tous les termes sont nuls) et surjective (c'est ce qu'admet l'énoncé en parlant de $u(a,b)$: on peut construire la suite u par récurrence à partir de ses deux premiers termes). Φ est ainsi un isomorphisme et

$$\dim(\Sigma) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

2. Une récurrence simple montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u(a,a))_n = a$$

   On a $u(ka,kb) = ku(a,b)$. Pour connaître tous les éléments de Σ, il suffit de connaître ceux tels que $a^2+b^2 = 1$ par exemple. Il suffit donc de connaître les $u(\cos(\theta), \sin(\theta))$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.
3. *L'énoncé n'est algorithmiquement pas très subtil puisque pour calculer les valeurs successives de $(u(a,b))_n - \mathrm{A}(n)$, il est stupide de recommencer le calcul complet depuis le début pour chaque terme. Il serait préférable d'écrire une fonction renvoyant la liste des quantités à calculer.*
   Pour la fonction `u`, on n'utilise pas une approche récursive pour éviter de faire deux appels à chaque étape. Comme dans le classique cas de la suite de Fibonacci, on préfère une approche itérative.

```
def u(a,b,n):
        x,y=a,b
        for k in range(3,n+1):
                x,y=y,(2*y+(k-2)*x)/k
        if n==1:
```

```
                return a
        else:
                return y

def A(n):
        s=0
        for k in range(1,n):
                s=s+(-1)**(k-1)/k
        return s

for n in range(2,20):
        print(u(1,3/2,n)-A(n))
```

4. Soit $u \in \Sigma$. On montre par récurrence que

$$\forall k \geqslant 1,\ |u_k| \leqslant \max(|u_1|, |u_2|) = \mathrm{M}$$

- C'est immédiat aux rangs 1 et 2.
- On suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $k-1 \geqslant 3$. On a alors

$$|u_k| \leqslant \frac{1}{k}(2|u_{k-1}| + (k-2)|u_{k-2}|) \leqslant \frac{1}{k}(2\mathrm{M} + (k-2)\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{M}$$

  ce qui prouve le résultat au rang k.

La suite u est bornée et on a donc $\mathrm{R}_u \geqslant 1$.

5. On sait que

$$\forall k \geqslant 3,\ k u_k x^{k-1} = 2u_{k-1}x^{k-1} + (k-2)u_{k-2}x^{k-1}$$

On somme ces relations et on reconnaît l'expression de f_u et de f_u' (on peut dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence) à ceci près qu'il manque des termes (car on ne somme qu'à partir de $k=3$) :

$$\forall |x| < \mathrm{R}_u,\ f_u'(x) - u_1 - 2u_2 x = 2(f_u(x) - u_1 x) + x^2 f_u'(x)$$

On obtient bien

$$\forall |x| < \mathrm{R}_u,\ (x^2-1)f_u'(x) + 2f_u(x) = 2(u_1 - u_2)x - u_1$$

6. Soit $v = u(1,1)$. On a $v_n = 1$ pour tout n et donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_v(x) = \sum_{n\geqslant 1} x^n = \frac{x}{1-x}$$

La question précédente indique que cette fonction est solution sur $]-1,1[$ de l'équation précisée.

7. $g = f_{u(1,3/2)}$ vérifie sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$(x^2-1)g'(x) + 2g(x) = -x-1$$

Une primitive sur $]-1,1[$ de $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ est $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\mathrm{Vect}\left(x \mapsto \frac{1+x}{1-x}\right)$. D'après la méthode de variation de la constante, pour que $x \mapsto c(x)\frac{1+x}{1-x}$ soit solution de l'équation complète, il suffit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ (x^2-1)\frac{1+x}{1-x} = -x-1$$

Il suffit donc de choisir $c(x) = \ln(1+x)$. La solution générale est donc $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}(\ln(1+x)+c)$. Comme $g(0)=0$, il faut choisir une constante nulle et on a donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_{u(1,3/2)}(x) = \frac{1+x}{1-x}\ln(1+x) = \frac{2}{1-x}\ln(1+x) - \ln(1+x)$$

8. On peut trouver le DSE de $f_{u(1,3/2)}$ à l'aide d'un produit de Cauchy à partir des DSE de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. On peut alors identifier les DSE pour obtenir

$$\forall n \geqslant 1,\ u(1,3/2)_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \mathrm{A}(n+1) + \mathrm{A}(n)$$

```
for n in range(2,20):
        print(u(1,3/2,n)-A(n)-A(n+1))
```

Planche D12 — Centrale 1 2017

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On désigne par O(E) l'ensemble des isométries de E et on introduit $\mathrm{I}(f) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{K}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Si $u \in \mathrm{E}$, on note s_u la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}u)^\perp$.

1. Soit $f \in \mathrm{O(E)}$. Montrer qu'un sous-espace F est stable par f si et seulement si $\mathrm{F}^\perp$ l'est.
2. Tojours pour $f \in \mathrm{O(E)}$, montrer que $\mathrm{I}(f) \oplus \mathrm{K}(f) = \mathrm{E}$ et que la somme est orthogonale.
3. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que :

$$\mathrm{I}(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

Solution

1. On suppose que F est stable par u. u induit sur F un endomorphisme v. Comme u est injectif, v l'est aussi et, par dimension, c'est un automorphisme de F. En particulier, tout élément y de F admet par u un antécédent dans F ($u^{-1}(y) \in \mathrm{F}$). Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$; on a

$$\forall y \in \mathrm{F},\ (u(x)|y) = (u(x)|u(u^{-1}(y))) = (x|u^{-1}(y)) = 0 \ \text{ car } \ x \in \mathrm{F}^\perp,\ u^{-1}(y) \in \mathrm{F}$$

On a donc $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$ et $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u.
La réciproque s'obtient en utilisant $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$ et avec le sens direct.

2. Soient $x \in \mathrm{I}(f)$ et $y \in \mathrm{K}(f)$. On a donc $f(y) = y$ et l'existence de $z \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(z) - z$. On a alors

$$(x|y) = (f(z) - z|y) = (f(z)|y) - (z|y) = (f(z)|f(y)) - (z|y) = 0$$

puisque f conserve le produit scalaire. On en déduit que $\mathrm{I}(f) \oplus \mathrm{K}(f)$ avec une somme directe orthogonale (si deux espaces sont orthogonaux, il sont en somme directe).
Par théorème du rang $\dim(\mathrm{I}(f)) + \dim(\mathrm{K}(f)) = \dim(\mathrm{E})$ et on on peut, avec la somme directe, conclure par dimension que

$$\mathrm{I}(f) \oplus \mathrm{K}(f) = \mathrm{E}$$

3. Pour montrer cette égalité entre sous-espaces, on peut montrer l'égalité entre les orthogonaux (il suffit ensuite de repasser à l'orthogonal). Comme $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p} \in \mathrm{O(E)}$ (composée d'isométries), l'orthogonal de $\mathrm{I}(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p})$ est $\mathrm{K}(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p})$ et il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{K}(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$$

Je propose de le prouver par récurrence sur p. L'hypothèse au rang p est "pour TOUTE famille libre $(u_1, \dots, u_p)$, on a l'égalité".

- Initialisation : soit $u_1 \neq 0$ ((u_1) famille libre. $\mathrm{K}(s_{u_1}) = \{x/\ s_{u_1}(x) = x\} = \mathrm{Vect}(u_1)^\perp$. Le résultat est vrai au rang 1.
- Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $p-1 \geqslant 0$. Soit alors $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre. Soit $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$. x est en particulier orthogonal à chaque u_i. Ainsi, x est laissé stable par chaque s_{u_i} et $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) = x$ ou encore $x \in \mathrm{K}(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p})$. On suppose, réciproquement, que $x \in \mathrm{K}(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p})$, c'est à dire que $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) = x$. On en déduit, en composant par s_{u_1} (qui est une involution)

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) = s_{u_1}(x)$$

puis

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) - x = s_{u_1}(x) - x$$

On remarque alors que $s_{u_1}(x) - x \in \mathrm{Vect}(u_1)$. Par hypothèse de récurrence(avec $(u_2, \dots, u_p)$ qui est libre)

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) - x \in \mathrm{I}(s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}) = \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_p)$$

Comme $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, on en déduit que

$$s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}(x) - x = s_{u_1}(x) - x = 0$$

x est donc dans $\mathrm{K}(s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}) \cap \mathrm{K}(s_{u_1})$ et ainsi

$$x \in \mathrm{Vect}(u_2, \ldots, u_p)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(u_1)^{\perp} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^{\perp}$$

ce qui finit de prouver le résultat au rang p.

Planche D13 — Centrale 2 2017

On définit une fonction de deux variables réelles en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

On considère S la surface d'équation $z = f(x, y)$ et le plan P d'équation $x + 2y - z = 0$.

1. **1.1.** Tracer la surface S pour $x, y \in [-3, 3]$.
   1.2. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
   1.3. Soit $\mathrm{M}(x, y, z) \in \mathrm{S}$. Trouver un vecteur n appartenant à P et au plan tangent à S en M.
2. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= -x - 2y + 2 \\ y' &= 2x + y - 1 \\ z' &= 3x \end{cases}$$

On note C l'arc paramétré par $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$ où (u, v, w) est l'unique solution du système vérifiant les conditions initiales $u(0) = 1$, $v(0) = -1$ et $w(0) = -1$.

2.1. Tracer l'arc paramétré C pour $t \in [0, 4]$.
2.2. À quoi correspond cet arc par rapport à S et P ? Le démontrer.

Solution

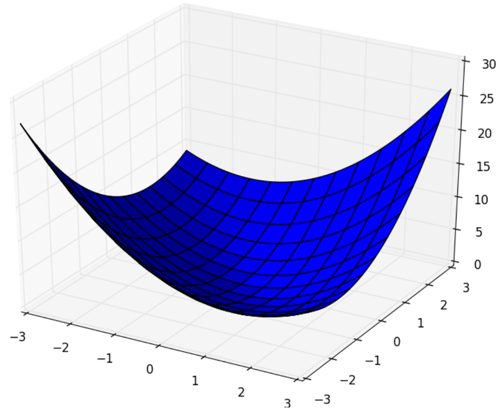
1. **1.1.** Je suis de manière mécanique les instructions du petit polycopié sur les tracés fourni par Centrale.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

ax=Axes3D(plt.figure())

def f(x,y):
        return x**2+x*y+y**2

X=np.arange(-3,3,0.05)
Y=np.arange(-3,3,0.05)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)
Z=f(X,Y)
ax.plot_surface(X,Y,Z)
plt.show()
```



1.2. On remarque que $xy \geqslant -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ et que donc

$$f(x,y) \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$$

f est ainsi de limite infinie quand $\|(x,y)\| \to +\infty$. Il existe $r>0$ tel que

$$\forall \|(x,y)\| \geqslant r,\ f(x,y) \geqslant 1$$

Su $\mathrm{BF}(0,r) = \{(x,y)/\ x^2+y^2 \leqslant r^2\}$ qui est compact, f est bornée et atteint ses bornes. f possède en particulier un minimum α sur ce compact. Comme $(0,0) \in \mathrm{BF}(0,r)$, $\alpha \leqslant f(0,0) = 0$. Ainsi, en dehors de $\mathrm{BF}(0,r)$, f est plus grande que α et α est en fait le minimum de f sur tout $\mathbb{R}^2$.

1.3. *Question très ambiguë car le plan tangent à* S *en un point est en fait un plan affine alors que* P *est défini comme un plan vectoriel. On dit que l'on cherche un vecteur : faut-il comprendre qu'il appartient à* P *et à la direction du plan tangent? Je traite la question comme elle est posée et je cherche donc un élément dans l'intersection du plan tangent et de* P.

Le plan tangent à S en $\mathrm{M}(x,y,z)$ est le plan passant par M et orthogonal au gradient en (x,y,z) de F : $(x,y,z) \mapsto f(x,y)-z$. Ce plan a donc pour équation

$$(2x+y)(\mathrm{X}-x)+(2y+x)(\mathrm{Y}-y)-(\mathrm{Z}-z)=0$$

On cherche donc $\vec{n}=(a,b,c)$ tel que

$$(2x+y)(a-x)+(2y+x)(b-y)-(c-z)=a+2b-c=0$$

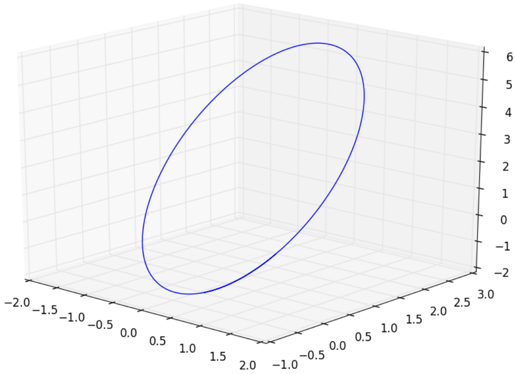
On doit résoudre ce système de deux équation à trois inconnues et juste en trouver une solution. Je ne vois pas trop l'intérêt de la question.

2. 2.1. Il faut d'abord résoudre le problème de Cauchy puis faire un tracé de courbe dans l'espace. La résolution donne un tableau `C`. Les premières (resp. secondes ou troisièmes) cordonnées de chaque ligne sont les valeurs approchées des $x(t)$ (resp $y(t)$ et $z(t)$). J'utilise une technique de slicing pour récupérer les listes monodimensionnelles.

```
from scipy.integrate import odeint

def F(C,t):
        return np.array([-C[0]-2*C[1]+2,2*C[0]+C[1]-1,3*C[0]])

T=np.arange(0,4,0.01)
C=odeint(F,np.array([1,-1,-1]),T)
ax=Axes3D(plt.figure())
ax.plot(C[:,0],C[:,1],C[:,2])
```



On obtient une courbe fermée plane.

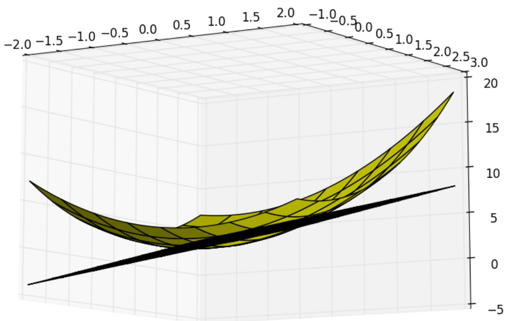
2.2. On peut penser que l'arc correspond à l'intersection de S et P (quoi d'autre?). Je tente une visualisation en plaçant plan et surface sur le même dessin.

```
def f(x,y):
        return x**2+x*y+y**2

def p(x,y):
        return x+2*y

X=np.arange(-2,2,0.05)
Y=np.arange(-1,3,0.05)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)
Z1=f(X,Y)
Z2=p(X,Y)
ax.plot_surface(X,Y,Z1,color='y')
ax.plot_surface(X,Y,Z2)
plt.show()
```

En faisant tourner le dessin à la main, on devine une intersection



Pour justifier, on peut montrer que $f(x(t), y(t)) - z(t)$ est constante égale à 0 (en dérivant et en regardant la valeur en 0). Idem avec $x(t) + 2y(t) - z(t)$. Ceci montre que la courbe est incluse dans l'intersection (mais pas une égalité).

Planche D14 — Centrale 1 2017

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.

1.1. Soit λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que $E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

1.2. Le résultat est-il toujours vrai si $\lambda = 0$?

2. Pour tout polynôme de P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(-4)X + P(6)$.

2.1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si $n \geqslant 1$.

2.2. Déterminer les éléments propres de f.

Solution

1. 1.1. Si $x \in E_\lambda(f)$ alors $f(x) = \lambda x$. Si on suppose $\lambda \neq 0$ alors $x = f(x/\lambda) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi,

$$\forall \lambda \neq 0,\ E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$$

1.2. $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$. La question est donc de savoir si $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$. Cette inclusion est assez évidemment fausse en règle générale. Il suffit de considérer deux supplémentaires $F \oplus G = E$ avec F et G non réduits à $\{0\}$ (en supposant $\dim(E) \geqslant 1$) et de prendre pour f la projection sur F de direction G. Ou encore plus simplement de prendre pour f l'application nulle (cas $E \neq \{0\}$)

2. 2.1. Il est immédiat que $f(\lambda P + Q) = \lambda\lambda f(P) + f(Q)$ et f est donc linéaire. De plus, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$ et donc, comme $n \geqslant 1$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. En choisissant $P = X + 4$ ou $P = X - 6$, on voit que $\mathbb{R}_1[X] \subset \mathrm{Im}(f)$ et on a donc une égalité. Par théorème du rang, le noyau de f est de dimension $n - 2$ ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$). Si $n \geqslant 2$, 0 est donc valeur propre. On peut même trouver le noyau puisque $f(P) = 0$ a lieu ssi $P(-4) = P(6) = 0$. Ainsi

$$E_0(f) = (X + 4)(X - 6)\mathbb{R}_{n-2}[X]$$

Soit λ une valeur propre non nulle et P un vecteur propre associé. P est alors dans l'image de f et il existe a, b (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) tels que $P = aX + b$. On a donc $f(P) = (-4a + b)X + (6a + b)$. $f(P) = \lambda P$ donne $\begin{cases} -(4+\lambda)a + b &= 0 \\ 6a + (1-\lambda)b &= 0 \end{cases}$. Ce système admettant une solution nulle, son déterminant est nul i.e. $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. On a donc $\lambda \in \{2, -5\}$.

Réciproquement, pour ces valeurs de λ le système a une droite de solutions. Ce sont donc des valeurs propres et la résolution donne

$$E_2(f) = \mathrm{Vect}(X + 6),\ E_{-5}(f) = \mathrm{Vect}(X - 1)$$

Planche D15 — Centrale 2 2017

Soit S la fonction définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|x-n|}}{2^n}$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Tracer le graphe de S sur $[0, 6]$.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. Montrer que S est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$.
   Vérifier avec Python.
5. On pose $F(x) = 2^x S(x)$ pour $x \geqslant 0$.

5.1. Tracer le graphe de F sur $[0, 20]$. Commenter.

5.2. Trouver une relation entre $F(x)$ et $F(x + 1)$.

Solution

1. Posons $f_n : x \mapsto \frac{e^{-|x-n|}}{2^n}$.
$\forall n,\ f_n \in C^0(\mathbb{R}^+)$ et

$$\forall a \geqslant 0,\ \forall n \geqslant a,\ \forall x \in [0, a],\ |f_n(x)| = \frac{e^{x-n}}{2^n} \leqslant \frac{e^{a-n}}{2^n}$$

On a donc, pour n assez grand, $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \frac{e^{a-n}}{2^n}$. Comme $e/2 \in [0, 1[$, le majorant est le terme général d'une série convergente et ainsi $\sum(f_n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^+$. Par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions,

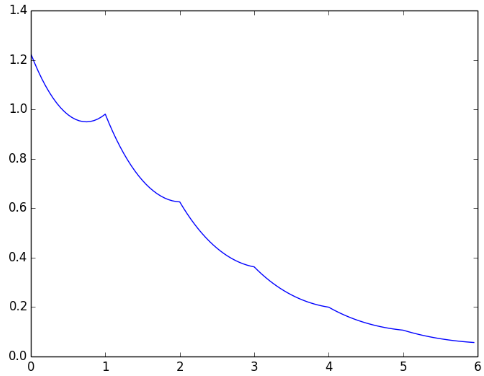
$$S \in C^0(\mathbb{R}^+)$$

2. On se contente ici de prendre la somme partielle d'ordre 50 (on pourrait augmenter).

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def S(x):
        s=0
        for n in range(50):
                s=s+np.exp(-abs(x-n))/2**n
        return s

lx=np.arange(0,6,0.05)
ly=[S(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly)
```



3. Le dessin suggère que S est de limite nulle en $+\infty$. Je propose de le prouver en revenant à la définition des limites. Je fixe donc $\varepsilon > 0$. Comme $\sum(1/2^n)$ converge, il existe un rang n_0 tel que $0 \leqslant \sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. $\sum_{k=0}^{n_0} f_k$ est alors une somme finie de fonctions de limite nulle en $+\infty$ et est donc de limite nulle en $+\infty$. Il existe a tel que pour $x\ geqa$, $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} f_k(x) \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\forall x \geqslant a,\ |S(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} f_k(x) + \sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{1}{2^n} \leqslant 2\varepsilon$$

On a bien prouvé que

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$$

4. f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et égale à une constante fois e^{-x} au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a

$$\int_0^\infty |f_n| = \int_0^\infty f_n = \int_0^n \frac{e^{x-n}}{2^n}\,dx + \int_n^\infty \frac{e^{n-x}}{2^n}\,dx = \frac{e^{-n}}{2^n}(e^n - 1) + \frac{e^n}{2^n} e^{-n}$$

ce qui se simplifie en

$$\int_0^\infty |f_n| = \frac{2}{2^n} - \left(\frac{1}{2e}\right)^n$$

C'est le terme général d'une série convergente (deux séries géométriques convergentes). Le théorème d'interversion somme-intégrale (intégration terme à terme) montre que S est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_0^\infty S(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty f_n = 4 - \frac{2e}{2e-1}$$

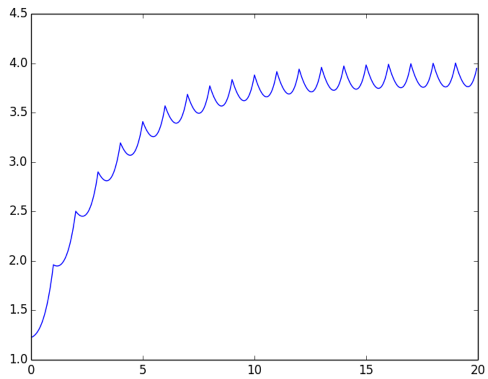
On vérifie avec Python par un calcul approché d'intégrale. Le calcul sur $\mathbb{R}^+$ échoue c'est pourquoi je le fais entre 0 et 10 puis entre 0 et 100. La comparaison avec la valeur trouvée ci-dessous est bonne.

```
from scipy.integrate import quad
print(quad(S,0,10)[0])
print(quad(S,0,100)[0])
print(4-2*np.exp(1)/(2*np.exp(1)-1))
```

5. Je définis une fonction F (je pourrais réutiliser S mais ici je prends des sommes partielles de rang plus grand).

```
def F(x):
        s=0
        for n in range(300):
                s=s+np.exp(-abs(x-n))*2**(x-n)
        return s

lx=np.arange(0,20,0.05)
ly=[F(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly)
```



Que dire ? Peut-être que c'est presque périodique au voisinage de $+\infty$...
Soit $x \geqslant 0$. On note N la partie entière de x et ainsi $N \leqslant x < N+1$ et $N+1 \leqslant x+1 < N+2$. On a alors

$$\begin{aligned}
F(x+1) &= 2^{x+1} S(x+1) \\
&= 2^{x+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|x+1-n|}}{2^n} \\
&= 2^{x+1} \left(\sum_{n=0}^{N+1} \frac{e^{-(x+1-n)}}{2^n} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{e^{-(n-(x+1))}}{2^n} \right) \\
&= 2^{x+1} \left(\sum_{j=-1}^{N} \frac{e^{-(x-j)}}{2^{j+1}} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{e^{-(j-x)}}{2^{j+1}} \right) \\
&= 2^x (e^{-(x+1)} + S(x)) \\
&= 2^x e^{-(x+1)} + F(x)
\end{aligned}$$