Exercice 13

1. On calcule χ_J. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & & & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1}{\overset{\text{DVP}}{=}} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & & & (0) \\ \lambda & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + (-1)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = \lambda^n - 1.$$

On note $w = e^{2i\pi/n}$. Les racines de χ_J sont les racines n^e de l'unité

donc : $Sp(J) = \{ \omega^k, k \in [\![0, n-1]\!] \}$.

J admet n vp distinctes donc J est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminons $E_{\omega^k}(J)$. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on résout :

$$JX = \omega^k X \iff \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^{2k} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \omega^{(n-1)k} x_1 \\ \underbrace{x_1 = \omega^{nk} x_1}_{x_1 = x_1 \text{ car } \omega^n = 1} \end{cases}$$

Ainsi : $E_{\omega^k}(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \right)$.

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \omega^k & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega^{(n-1)k} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$ et on a :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \omega & & \\ & & \omega^2 & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} = D.$$

2. En calculant les puissances de J, on comprend que :

$$A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$$

On va écrire $A = \varphi(J)$ où $\varphi(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Ainsi : $$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (PDP^{-1})^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k PD^kP^{-1}$$
$$= P\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\right) P^{-1}$$
$$= P\,\varphi(D)\,P^{-1}$$

Or, par un calcul rapide, on a :

$$\varphi(D) = \begin{pmatrix} \varphi(1) & & (0) \\ & \varphi(\omega) & \\ (0) & & \ddots & \varphi(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

d'où $\varphi(D)$ est diagonale. Ainsi A est semblable à $\varphi(D)$ qui est diagonale donc A est diagonalisable et une matrice de passage associée est P.

3. A et $\varphi(D)$ étant semblables, on a :

$$\det A = \det[\varphi(D)] = \det \begin{pmatrix} \varphi(1) & & (0) \\ & \varphi(\omega) & \\ (0) & & \ddots & \varphi(\omega^{n-1}) \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi(\omega^i).$$

Exercice 14 ••• — *Diagonalisabilité d'une matrice par blocs*

Soient $n \geqslant 1$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$. On introduit la matrice $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par blocs suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

On commence par prouver le résultat pour les monômes $P(X) = X^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on procède par récurrence pour démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

On adopte ici la convention $kA^{k-1}B = 0$ si $k = 0$ pour ne pas traiter le cas $k = 0$ à part.

- **Initialisation** Le cas $k = 0$ donne $M^0 = I_{2n}$, ce qui est vérifié.
- **Hérédité** On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$. On écrit, en utilisant l'hypothèse de récurrence et en effectuant un produit matriciel par blocs :

$$M^{k+1} = MM^k = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & kA^kB + BA^k \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^kB \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix}$$

  où l'on a utilisé pour la dernière égalité que A et B commutent, ce qui conclut la phase d'hérédité.

Par principe de récurrence, le résultat est donc prouvé pour les monômes $P(X) = X^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ces monômes formant une famille génératrice (infinie...) de $\mathbb{K}[X]$, nous allons pouvoir conclure. On se donne un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ que l'on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et on conclut, en utilisant le résultat qui précède, que :

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k & \sum\limits_{k=0}^{d} a_k kA^{k-1}B \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

2. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

Supposons M est diagonalisable. Par l'un des critères du cours, on sait qu'il existe un polynôme annulateur de M scindé à racines simples. Le résultat précédent donne, puisque $P(M) = 0$, que $P(A) = P'(A)B = 0$. En particulier, P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples de sorte que, toujours grâce au même critère mais utilisé « dans l'autre sens », on obtient que A est diagonalisable. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, A est semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On obtient alors facilement que $P'(A)$ est semblable à $\operatorname{diag}(P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n))$. Le polynôme P étant annulateur de A, on sait par le cours que les $(\lambda_i)_i$ sont racines de P. Mais puisque P est scindé à racines simples, les racines de P ne sont pas racines de P'. On obtient donc que $P'(\lambda_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $P'(A)$ est semblable à une matrice diagonale sans aucun 0 sur la diagonale et est donc inversible. En composant par $P'(A)^{-1}$ dans la relation $P'(A)B = 0$, il vient $B = 0$.
Réciproquement, si A est diagonalisable et si $B = 0$ alors on peut facilement montrer que M est diagonalisable. En effet, si A est diagonalisable, il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et P inversible telles que $P^{-1}AP = D$. On pose alors :

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

On peut facilement prouver que Q est inversible avec :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

de sorte que M est semblable à une matrice diagonale et est donc diagonalisable.
Finalement M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

Exercice 15 ••• *Matrices à coefficients entiers*

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers qui vérifie $A^n = I_2$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'on a nécessairement $A^{12} = I_2$.

Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle annule le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$. De plus, les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme annulateur de sorte que le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines n−ème de l'unité. Dès lors :

- Si A possède deux valeurs propres réelles, ce ne peuvent être que -1 et 1. Les spectres possibles sont alors :

$$\{1\}, \quad \{-1\} \quad \text{et} \quad \{-1, 1\} \tag{S$_1$}$$

- Si A possède au moins une valeur propre complexe non réelle λ, on sait, puisque A est une matrice à coefficients entiers et donc réels, que $\overline{\lambda}$ est également valeur propre de A. Comme $\overline{\lambda} \neq \lambda$ puisque $\lambda \notin \mathbb{R}$ et que A a au plus deux valeurs propres, les valeurs propres de A sont λ et $\overline{\lambda}$ et sont simples. Le polynôme caractéristique de A étant scindé sur $\mathbb{C}$, on sait que la trace de A vaut la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, qui est ici un élément de $\mathbb{Z}$. On en déduit $\text{Tr}(A) = \lambda + \overline{\lambda} \in \mathbb{Z}$ soit $\text{Tr}(A) = 2\,\text{Re}(\lambda) \in \mathbb{Z}$. Mais λ est une racine n−ème de l'unité par ce qui précède et n'est pas réelle donc $|\text{Re}(\lambda)| < 1$. On en déduit que $\text{Tr}(A) = 2\,\text{Re}(\lambda) \in [\![-1, 1]\!]$. Toujours avec le fait que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, on sait que le produit des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités vaut $\det(A)$. Cela donne $\det(A) = \lambda \cdot \overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$ puisque λ est une racine n−ème de l'unité. Le polynôme caractéristique de A étant $X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$, les seules possibilités sont :

$$X^2 + X + 1, \quad X^2 + 1 \quad \text{et} \quad X^2 - X + 1$$

  ce qui donne les spectres possibles suivants :

$$\{j, \overline{j}\}, \quad \{i, -i\} \quad \text{et} \quad \{-j, -\overline{j}\} \tag{S$_2$}$$

Enfin, puisque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on peut écrire $A = P\,\text{diag}(a, b)P^{-1}$ avec $(a, b) \in \text{sp}(A)^2$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$. On obtient alors $A^{12} = P\,\text{diag}(a^{12}, b^{12})P^{-1}$. Mais si $z \in \text{sp}(A)$, d'après (S$_1$) et (S$_2$), on a $z \in \{-1, 1, j, \overline{j}, i, -i, -j, -\overline{j}\}$ et on peut vérifier que dans tous les cas on a $z^{12} = 1$. Cela donne alors $A^{12} = PI_2P^{-1} = I_2$ comme souhaité.