Exercice 13

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Grâce à la Q3 de l'exercice 8, on sait que $A^TA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Avec la Q2 du même exercice, il existe $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A^TA$.

En passant au déterminant, on a $\det(R)^2 = \det(A)^2 \neq 0$ car $A \in GL_n(\mathbb{R})$

donc $\det(R) \neq 0$, $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On pose : $S = R$ et $P = (A^T)^{-1}R$.

- On a : $A = (A^T)^{-1}A^TA = (A^T)^{-1}R^2 = PS$;
- $S = R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après ce qui précède ;
- $P^TP = ((A^T)^{-1}R)^T(A^T)^{-1}R = R^T A^{-1}(A^T)^{-1}R$ R symétrique

$$= R \cdot (A^TA)^{-1} R$$

$$= R \cdot (R^2)^{-1} R$$

$$= R \cdot R^{-2} R = I_n$$

donc $P \in O_n(\mathbb{R})$.

D'où le résultat.